DOI: 10.5862/JCSTCS.247.4
УДК 517.4+004.942

С.А. Горожанкин, А.А. Шитов, Н.В. Савенков

МЕТОДИКИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ЗАВИСИМОСТЕЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MS EXCEL И MATHCAD

S.A. Gorozhankin, A.A. Shitov, N.V. Savenkov

PROCEDURES FOR APPROXIMATING DEPENDENCES OF SEVERAL VARIABLES IN MS EXCEL AND MATHCAD SOFTWARE ENVIRONMENT

Предложены методики аппроксимации дискретных данных непрерывными гладкими функциями нескольких переменных при выполнении экспериментальной части научного исследования. Приведенный материал базируется на применении таких относительно распространенных программных продуктов, как MS Excel и Mathcad, может быть реализован в аналогичных по структуре и назначению компьютерных программах, содержит результаты практического применения на примере аппроксимации функциями нескольких переменных различного вида характеристик современного автомобильного двигателя внутреннего сгорания. Даны рекомендации по рациональному применению предлагаемых методик, описаны возможные сопутствующие сложности при их реализации в рассматриваемых программных оболочках. Представленные теоретический материал и практические примеры процедур аппроксимации отличаются множеством настроек, гибкостью применения к различному виду представления исходных данных, а также относительной простотой использования, так как построены по принципу «от простого к сложному».

АППРОКСИМАЦИЯ; ЗАВИСИМОСТЬ; ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ; АРГУМЕНТ; ИССЛЕДОВАНИЕ; ЭКСПЕРИМЕНТ; ДИСКРЕТНОЕ МНОЖЕСТВО; КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА; СПЛАЙН; АЛГОРИТМ.

The article suggests a technique for approximating the original data via continuous smooth functions of several variables when performing the experimental part of a scientific study. The material is based on using such relatively common software like MS Excel and Mathcad, it can be implemented in structurally and functionally similar computer programs, and also provides results of practical application on the example of approximating the characteristics of a modern automobile internal combustion engine via functions of several variables of different kinds. In addition, the paper presents recommendations for rational use of the suggested methods and possible related difficulties in their implementation in the considered software shells. Theoretical material and practical examples of the approximation procedures prepared by the authors are distinguished by a lot of options, flexibility of application to different types of representation of the original data, as well as the relative ease of use, because they are based on a simple-to-complex basis.

APPROXIMATION; DEPENDENT; FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES; ARGUMENT; STUDY; EXPERIMENT; DISCRETE DATA; COMPUTER PROGRAM; SPLINE; ALGORITHM.

В настоящей статье предлагаются методики аппроксимации многофакторных зависимостей на примере таких относительно распространенных, а также имеющих простой пользовательский интерфейс, программных продуктов, как табличный процессор Microsoft Excel и система компьютерной алгебры Mathcad.

Предлагаемые методики отличаются от традиционного использования рассматриваемых программ возможностью поэтапного выполнения процедуры аппроксимации при комбинированном применении элементарных и кусочно-заданных функций различного вида, а также относительно более широким набором настраиваемых параметров; это позволяет повысить достоверность разрабатываемых математических моделей.

Новизна предлагаемых методик относительно известных общих рекомендаций, изложенных в работах [1–5], заключается в построении многофакторных зависимостей средствами программных продуктов, предназначенных главным образом для выполнения однофакторной аппроксимации. Такой подход позволяет: индивидуально подбирать для каждой переменной такой тип аппроксимирующей функции, при котором обеспечивается минимальное значение величин численного отклонения, и при этом не нарушается физический смысл рассматриваемого объекта либо процесса; применять в пределах одной аппроксимирующей функции нескольких переменных зависимости различных типов (например, кусочно-заданные и элементарные); отказаться от необходимости структурирования исходного дискретного множества в виде сетки с заданным шагом значений аргументов – предлагаемые методики, фактически, позволяют работать непосредственно с результатами экспериментальных исследований.

Приведенный в статье материал отобран и систематизирован нами с целью разработки некоторых общих рекомендаций и готовых практических решений, позволяющих облегчить процесс обработки результатов экспериментальных исследований.

Ввиду своей относительной сложности для некоторых нелинейных зависимостей, автоматическая аппроксимация исходных дискретных множеств может быть осуществлена с помощью:

- элементарных функций, представленных уравнениями, которые могут применяться для практических инженерных расчетов, а также экспортироваться в другие программные продукты (например, в Mathcad или в Maple) для последующей обработки и анализа;
- кусочно-заданных аналитических зависимостей, под которыми подразумеваются такие фрагментные зависимости, которые содержат логические операторы (например, сплайн-функции). Эти зависимости применены для описания физических процессов, аппроксимация которых с помощью элементарных функций сопряжена с большей величиной численного отклонения и на некоторых интервалах противоречит физическому смыслу изучаемого процесса [2].

Для автоматизированного создания аппроксимирующих зависимостей, представленных элементарными функциями, может быть применено множество программных продуктов, например – Microsoft Excel или CurveExpert. Работа с кусочно-заданными функциями в настоящей статье рассмотрена на примере системы компьютерной алгебры Mathcad; вычислительные комплексы, подобные последнему, обычно не позволяют получить аппроксимирующие уравнения в аналитическом виде (что объясняется громоздким представлением и ограниченными возможностями самих программ). Поэтому дальнейшая работа с полученными условными функциями выполняется, как правило, в среде соответствующего программного продукта.

Приведенные принципы автоматической аппроксимации обусловлены формой исходного дискретного множества и числом его аргументов. Статья посвящена построению функций нескольких переменных, однако для иллюстрации возможностей предлагаемых методик, рассмотрим в первую очередь особенности создания зависимостей одной переменной.

Однофакторная модель

Аппроксимация зависимости одной переменной вида $y = f(x)$ с помощью как элементарной, так и кусочно-заданной функций выполняется *в один этап* и приведена на примере внешней скоростной характеристики эффективной мощности автомобильного двигателя внутреннего сгорания (ДВС). На рис. 1 *а* показано исходное дискретное множество (результаты измерений на лабораторном стенде) и соответствующие аппроксимирующие функции.

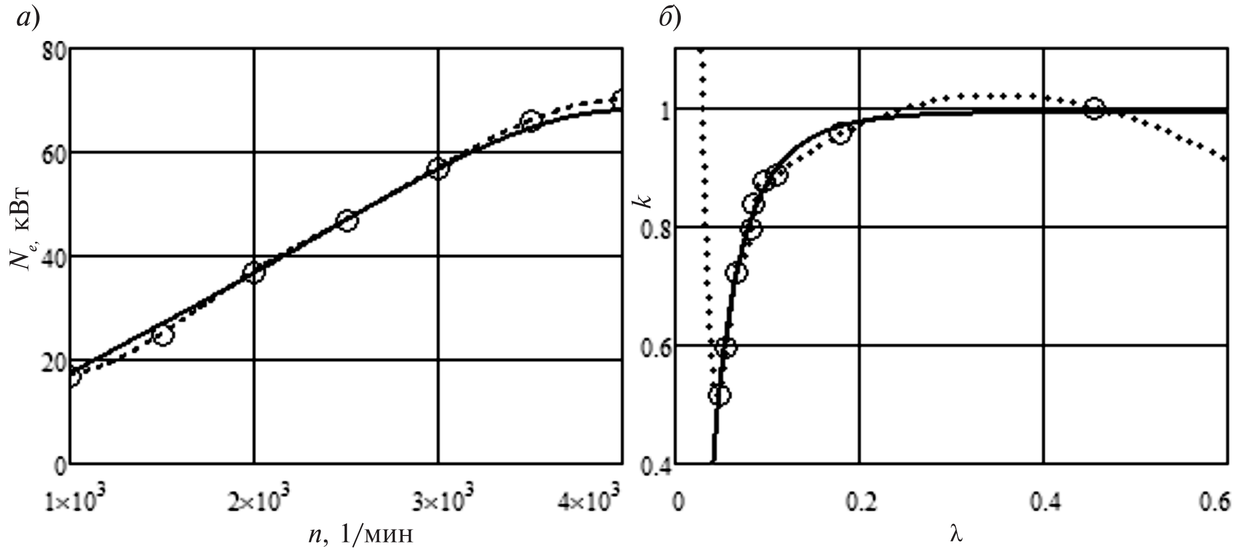

Рис. 1. Пример графического построения средствами Mathcad различных аппроксимирующих функций для зависимостей одной переменной:
а – эффективной мощности N_e ДВС от частоты вращения коленчатого вала n;
б – зависимости коэффициента использования мощности k от коэффициента нагрузки λ
(○) – результаты экспериментов; (——) – аппроксимация элементарной функцией;
(-----) – аппроксимация кусочно-заданной функцией

Для автоматической аппроксимации элементарной функцией применен табличный процессор Microsoft Excel (команда «Добавить линию тренда» [3]). Исходному множеству (при значении коэффициента коллинеарности R = 0,9997) удовлетворяет полином 4-й степени:

$$N_e = f(n) = a_e + b_e n + c_e n^2 + d_e n^3 + e_e n^4, \quad (1)$$

где a_e, b_e, c_e, d_e, e_e – полиномиальные коэффициенты, равные соответственно: –5,6032; 0,0297; $-1{,}0379\cdot10^{-5}$; $4{,}2\cdot10^{-9}$; $-5{,}78910^{-13}$.

Эту аппроксимацию можно осуществить и с помощью других программных пакетов. Например, применение всесторонней системы подбора кривых CurveExpert позволяет получить аналогичный результат.

В общем виде алгоритм для аппроксимации исходного множества кусочно-заданной функцией кубического интерполяционного сплайна в системе компьютерной алгебры Mathcad представлен следующими зависимостями:

$$X := (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n)^{\mathrm{T}}, \quad (2)$$

$$Y := (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \ldots \quad y_n)^{\mathrm{T}}, \quad (3)$$

а кусочно-заданной линейной функцией зависимостями [4]:

$$y(x) := \text{interp}\ (\text{cspline}(X,\ Y),\ X,\ Y,\ x), \quad (4)$$

$$y(x) := \text{linterp}(X,\ Y,\ x), \quad (5)$$

где X – массив аргументов дискретного множества; Y – массив соответствующих значений дискретного множества; $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ – соответственно аргументы и значения дискретного множества, полученные в результате выполнения эксперимента (рис. 1 *а*) [6].

Для рассматриваемого примера однофакторной зависимости соответствующий листинг будет представлен выражениями:

$$X := (1000 \quad 1500 \quad 2000 \quad 2500 \quad 3000 \quad 3500 \quad 4000)^{\mathrm{T}}, \quad (6)$$

$$Y := (17 \quad 25 \quad 37 \quad 47 \quad 57 \quad 66 \quad 70)^{\mathrm{T}}, \quad (7)$$

$$N_e(n) := \text{interp}\ (\text{cspline}(X,\ Y),\ X,\ Y,\ n). \quad (8)$$

Вместо команды кубического сплайна «cspline» для некоторых функций, в соответствии с их видом, может быть применена команда аппроксимации параболическим сплайном «pspline» или линейным «lspline».

Приведенные алгоритмы Mathcad также позволяют получать значения исследуемой зависимости и за пределами исходной дискретной области – в экстраполяции.

При работе с программными оболочками могут получиться и противоречивые результаты. Например, несмотря на высокое значение коэффициента коллинеарности ($R = 1$), кусочно-заданные сплайн-функции не всегда могут быть применены для аппроксимации исходного физического процесса. На рис. 1 *б* приведены результаты экспериментальных исследований зависимости коэффициента использования мощности автомобильного бензинового двигателя от коэффициента нагрузки, а также соответствующие аппроксимирующие функции. Как показано на графике, наилучшим вариантом является аппроксимация элементарной экспоненциальной (Вейбула) функцией:

$$k_{(n)} = f(\lambda) = a_k - b_k \cdot \exp(-c_k \cdot \lambda^{dk}), \qquad (9)$$

где a_k, b_k, c_k, d_k, – коэффициенты: 0,992; 7,36; 14,92; 0,56.

Приведенная функция получена в программной среде CurveExpert с помощью команды «Apply Fit».

Использование для описания дискретных множеств кусочно-заданных сплайн-функций в ряде случаев на некоторых интервалах может противоречить исходному физическому процессу, как это показано на рис. 1 *б*, где по своему определению величина λ не может принимать значения, превышающие единицу. В основном образование так называемых «возмущений» между опорными точками объясняется недостаточной плотностью их расположения на координатных плоскостях [7].

Двухфакторная модель

Аналогичным образом зависимости двух переменных могут быть аппроксимированы непрерывными функциями рассматриваемых типов вида $z = f(x, y)$ в один либо в два этапа.

Исходные дискретные множества, в соответствии с особенностями планирования конкретного эксперимента (подразумеваются особенности как самой методики проведения опыта, так и применяемого оборудования, приборов, а также специфики исследуемого физического процесса), могут быть представлены в двух различных вариантах. Первый – в виде математической матрицы, в которой каждому значению (x_{nm} или y_n) одноименного аргумента (X или Y) соответствует одинаковое количество значений функции (z_{nm}), табл. 1. Второй вариант – в виде семейства зависимостей вида $Z_m = f(X_m)$, каждая из которых справедлива для конкретного значения y_m аргумента Y; при этом каждому значению y_m может соответствовать различное количество значений функции z_{nm}, табл. 2 [8].

В таблицах приведена запись исходных дискретных данных как в общем виде для обоих вариантов, так и в виде конкретных примеров двухфакторных зависимостей – удельного расхода топлива ДВС $g_e = f(n, k)$ (табл. 1) и объемного расхода воздуха ДВС $Q_0 = f(P, n)$ (табл. 2), где P – давление воздуха в ресивере впускной системы ДВС. Данные получены в ГОУ ВПО «ДонНАСА» при стендовых испытаниях двигателя УМЗ-4216 [9, 10].

Наиболее сложный случай представления дискретной двухфакторной зависимости вида $z = f(x, y)$, в котором каждому ее значению соответствует своя пара значений аргументов, в данной статье не рассмотрен.

Процедура аппроксимации двухфакторной зависимости, которая задана квадратной матрицей (табл. 1), с помощью кусочно-заданной функции может быть выполнена в Mathcad *за один этап* на основании приведенного алгоритма [11]:

$$X := (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n)^{\mathrm{T}}, \qquad (10)$$

$$Y := (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \ldots \quad y_n)^{\mathrm{T}}, \qquad (11)$$

$$XY^{\langle 0 \rangle} := X \quad XY^{\langle 1 \rangle} := Y, \qquad (12)$$

$$Z := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \ldots & z_{n1} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \ldots & z_{n2} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \ldots & z_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{1m} & z_{2m} & z_{3m} & \ldots & z_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

Таблица 1

Зависимость двух переменных, представленная математической матрицей

		Y				
		y_1	y_2	y_3	…	y_n
X	x_1	z_{11}	z_{21}	z_{31}	…	z_{n1}
	x_2	z_{12}	z_{22}	z_{32}	…	z_{n2}
	x_3	z_{13}	z_{23}	z_{33}	…	z_{n3}
	…	…	…	…	…	…
	x_m	z_{1m}	z_{2m}	z_{3m}	…	z_{nm}

		k				
		0,6	0,7	0,8	0,9	1
n	1000	342	324	302	279	300
	1500	316	298	281	272	274
	2000	342	313	296	283	286
	2500	346	315	293	283	288
	3000	358	326	303	292	294

Таблица 2

Зависимость двух переменных в виде семейства однофакторных зависимостей

Y	y_1	X_1	x_{11}	x_{21}	…	x_{m1}
		Z_1	z_{11}	z_{21}	…	z_{m1}
	y_2	X_2	x_{12}	x_{22}	…	x_{m2}
		Z_2	z_{12}	z_{22}	…	z_{m2}
	…	…	…	…	…	…
	y_n	X_n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{mn}
		Z_n	z_{1n}	z_{2n}	…	z_{mn}

n	1500	$P_{(1)}$	555	598	658	724
		$Q_{O(1)}$	56,7	65,2	69,5	90,1
	2000	$P_{(2)}$	628	650	711	730
		$Q_{O(2)}$	97	102,8	115,6	118
	2500	$P_{(3)}$	496	569	671	708
		$Q_{O(3)}$	96,8	108,1	132	140,3
	3000	$P_{(4)}$	464	607	641	703
		$Q_{O(4)}$	102,6	144,3	155,5	169,2

$$z(x,y) := \mathrm{interp}\left[\mathrm{cspline}(XY, Z), XY, Z, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]. \qquad (14)$$

Зависимость $g_e = f(n, k)$, аппроксимированная с помощью представленного алгоритма, приведена графически на рис. 2 *а*. По аналогии с (4), кроме кубического сплайна может применяться параболический либо линейный.

Если исходные данные представлены в виде семейства однофакторных зависимостей (табл. 2, а также в случае прямоугольной матрицы – при $n \neq m$), то необходимо привести их к квадратной матрице. Таким образом, процедура аппроксимации будет выполняться *в два этапа*.

Этап 1. В соответствии с (2)–(4), создается n-е количество функций вида $z_n = f(x_n)$, каждая из которых справедлива для конкретного значения y_n.

Этап 2. Создается квадратная матрица значений, и в соответствии с (10)–(14) выполняется аппроксимация.

Также на примере функции $Q_0 = f(P, n)$ рассмотрим применение упрощенной методики.

Этап 1

$$P_1 := (555 \quad 598 \quad 658 \quad 724)^{\mathrm{T}}; \qquad (15)$$

$$P_2 := (628 \quad 650 \quad 711 \quad 730)^{\mathrm{T}}; \qquad (16)$$

$$P_3 := (496 \quad 569 \quad 671 \quad 708)^{\mathrm{T}}; \qquad (17)$$

$$P_4 := (464 \quad 607 \quad 641 \quad 703)^{\mathrm{T}}; \qquad (18)$$

$$Q_{0(1)} := (56{,}7 \quad 65{,}2 \quad 69{,}5 \quad 90{,}1)^{\mathrm{T}}; \qquad (19)$$

$$Q_{0(2)} := (97 \quad 102{,}8 \quad 115{,}6 \quad 118)^{\mathrm{T}}; \qquad (20)$$

$$Q_{0(3)} := (96{,}8 \quad 108{,}1 \quad 132 \quad 140{,}3)^{\mathrm{T}}; \qquad (21)$$

$$Q_{0(4)} := (102{,}6 \quad 144{,}3 \quad 155{,}5 \quad 169{,}2)^{\mathrm{T}}; \qquad (22)$$

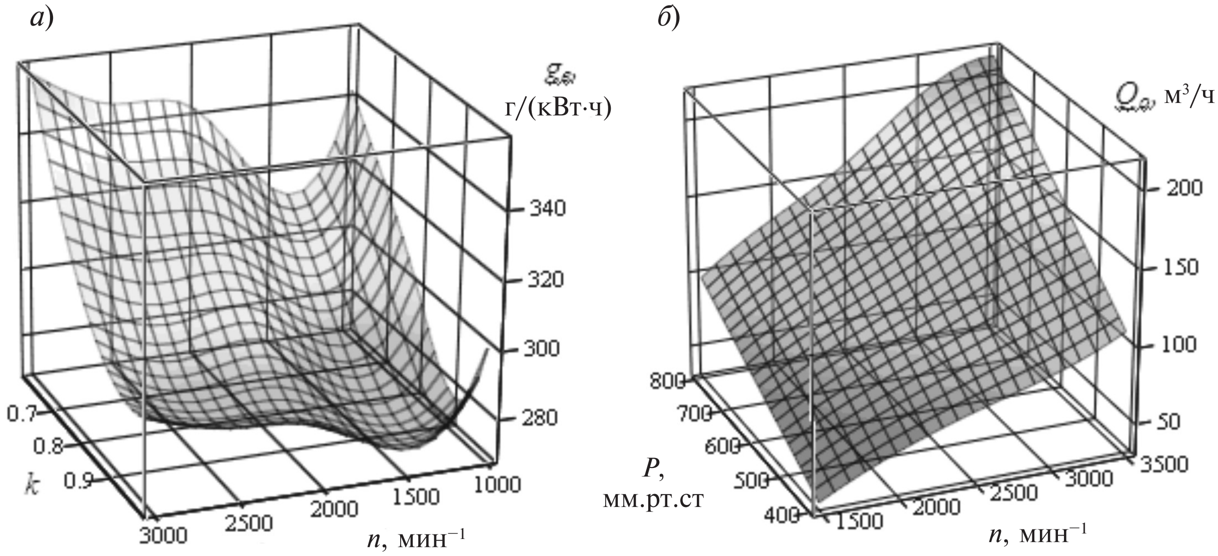

Рис. 2. Пример графического построения средствами Mathcad аппроксимирующих функций двухфакторных зависимостей:
а – удельного расхода топлива ДВС с помощью функции кубического сплайна; *б* – объемного расхода воздуха ДВС с помощью линейных функций по переменной *P* и полиномиальных 4-й степени по переменной *n*

$$Q_{0(1)}(P) := \text{interp}\,(\text{cspline}(P_1,\ Q_{0(1)}),\ P_1,\ Q_{0(1)},\ P); \quad (23)$$

$$Q_{0(2)}(P) := \text{interp}\,(\text{cspline}(P_2,\ Q_{0(2)}),\ P_2,\ Q_{0(2)},\ P); \quad (24)$$

$$Q_{0(3)}(P) := \text{interp}\,(\text{cspline}(P_3,\ Q_{0(3)}),\ P_3,\ Q_{0(3)},\ P); \quad (25)$$

$$Q_{0(4)}(P) := \text{interp}\,(\text{cspline}(P_4,\ Q_{0(4)}),\ P_4,\ Q_{0(4)},\ P); \quad (26)$$

Этап 2:

$$N := (1500 \quad 2000 \quad 2500 \quad 3000)^{\text{т}}; \quad (27)$$

$$Q(P) := (Q_{0(1)}(P) \quad Q_{0(2)}(P) \quad Q_{0(3)}(P) \quad Q_{0(4)}(P))^{\text{т}}; \quad (28)$$

$$Q_0(P,n) := \text{interp}\,(\text{cspline}(N,\ Q(P)),\ N,\ Q(P),n). \quad (29)$$

Полученная функция $Q_0(P,\ n)$ в графическом виде приведена на рис. 2 *б*. Данная зависимость может быть также задана и комбинированно – все либо некоторые выражения первого этапа аппроксимации ($Q_{0(1)}(P) ... Q_{0(1)}(P)$) могут иметь отличный от выражения второго этапа аппроксимации (29) тип сплайна (например, параболический или линейный).

Процедура аппроксимации двухфакторной зависимости элементарной функцией выполняется в два этапа.

Этап 1.

Исходные данные, в случае если они заданы математической матрицей, приводятся к виду, представленному в табл. 2. В итоге будет получено *n*-е число зависимостей одной переменной.

Первый этап начинается с выбора наиболее подходящего типа и размера аппроксимирующей элементарной функции, одинаковых для всех зависимостей $Z_n = f(X_n)$. Рассмотрим это на примере данных, приведенных в табл. 2. Для всех четырех дискретных множеств достаточную достоверность обеспечивает применение линейной функции:

$$Q_0 = f(P,n) = \begin{cases} Q_{0(1)}(P) = a_{B(1)}P + b_{B(1)} = 0,158P - 28,976 & \text{для } n = 1500 \\ Q_{0(2)}(P) = a_{B(2)}P + b_{B(2)} = 0,181P - 15,362 & \text{для } n = 2000 \\ Q_{0(3)}(P) = a_{B(3)}P + b_{B(3)} = 0,213P - 10,858 & \text{для } n = 2500 \\ Q_{0(4)}(P) = a_{B(4)}P + b_{B(4)} = 0,269P - 18,989 & \text{для } n = 3000 \end{cases}, \quad (30)$$

где $a_{B(1)}...a_{B(4)}$, $b_{B(1)}...b_{B(4)}$ – коэффициенты аппроксимации, полученные в рассматриваемом примере в программной среде Microsoft Excel.

В итоге получено семейство зависимостей, каждая из которых справедлива для определенного значения аргумента n. Приведенная функция (30) имеет гладкую зависимость по переменной P и дискретную по переменной n.

В том случае, когда особенность исследуемого физического процесса связана с проблематичностью подбора типа аппроксимирующей элементарной функции (для $Z_n = f(X_n)$), а дискретное множество задано квадратной либо прямоугольной математической матрицей, то целесообразно проверить возможность выполнения первого этапа аппроксимации по другой переменной – $Z_n = f(Y_n)$. В некоторых случаях это позволяет обойти рассматриваемую сложность.

Этап 2.

Второй этап направлен на получение гладкой зависимости также и по второй переменной – в рассматриваемом случае по n. В соответствии с (30) искомая аппроксимирующая двухфакторная функция в общем виде представлена уравнением:

$$Q_{0(n)}(P,\ n) = a_B(n)P + b_B(n), \qquad (31)$$

где $a_B(n)$ и $b_B(n)$ – аппроксимирующие функции для коэффициентов.

Значения коэффициентов каждой строки выражения (30) зависят от аргумента n:

$$a_B = f(n) = \begin{cases} 0,158 \text{ для } n = 1500 \\ 0,181 \text{ для } n = 2000 \\ 0,213 \text{ для } n = 2500 \\ 0,269 \text{ для } n = 3000 \end{cases}, \qquad (32)$$

$$b_B = f(n) = \begin{cases} -28,976 \text{ для } n = 1500 \\ -15,362 \text{ для } n = 2000 \\ -10,858 \text{ для } n = 2500 \\ -18,989 \text{ для } n = 3000 \end{cases}. \qquad (33)$$

В ходе второго этапа выполняется создание элементарных аппроксимирующих однофакторных функций для зависимостей коэффициентов – выбирается наиболее подходящий их тип и размер. При этом аргументами являются числа вторых столбцов систем выражений (32) и (33) – (1500; 2000; 2500; 3000), а значениями – числа первых столбцов. Для рассматриваемого примера, аппроксимация функций коэффициентов выполнена в программной среде Microsoft Excel с помощью полинома 4-й степени:

$$a_B = f(n) = -1,599 + 3,23 \cdot 10^{-3} \cdot n - 2,189 \cdot 10^{-6} \cdot n^2 + 6,486 \cdot 10^{-10} \cdot n^3 - 6,953 \cdot 10^{-14} \cdot n^4; \qquad (34)$$

$$b_B = f(n) = 615,37 - 1,303 \cdot n + 9,416 \cdot 10^{-4} \cdot n^2 - 2,865 \cdot 10^{-7} \cdot n^3 + 3,132 \cdot 10^{-11} \cdot n^4. \qquad (35)$$

Таким образом, искомая аппроксимирующая функция для исходного дискретного множества (табл. 2) при применении элементарных зависимостей имеет вид (рис. 2 *б*):

$$Q_0(P,\ n) = (-1,599 + 3,23 \cdot 10^{-3} \cdot n - 2,189 \cdot 10^{-6} \cdot n^2 + 6,486 \cdot 10^{-10} \cdot n^3 - 6,953 \cdot 10^{-14} \cdot n^4) \cdot P + (615,37 - 1,303 \cdot n + 9,416 \cdot 10^{-4} \cdot n^2 - 2,865 \cdot 10^{-7} \cdot n^3 + 3,132 \cdot 10^{-11} \cdot n^4). \qquad (36)$$

Если на завершающем (втором) этапе возникают трудности с аппроксимацией зависимостей коэффициентов, то для этого может быть применен *комбинированный способ* задания аппроксимирующей функции. Например, первый этап может содержать семейство элементарных аппроксимирующих функций, как это рассмотрено на примере выражения (30), а зависимости коэффициентов (32) и (33) на втором этапе могут быть аппроксимированы кусочно-заданными функциями (например, в программной среде Mathcad с помощью алгоритма (2)–(4)).

Кроме того, результаты первого этапа аппроксимации элементарными функциями позволяют представить исходное дискретное множество (см. табл. 2) в виде квадратной математической матрицы. Это дает возможность выполнения второго этапа с помощью алгоритма (10)–(14).

Таким образом, *комбинированный способ* формирования аппроксимирующих функции позволяет в некоторой степени сочетать преимущества как элементарных, так и кусочно-заданных функций.

Таблица 3

Трехфакторная зависимость в виде семейства математических матриц

Z	z_1 X_1					z_2 X_2						z_i X_i			
Y_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{n1}	Y_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{n2}		Y_i	x_{1i}	x_{2i}	...	x_{ni}
y_{11}	t_{111}	t_{211}	...	t_{n11}	y_{12}	t_{112}	t_{212}	...	t_{n12}	...	y_{1i}	t_{11i}	t_{21i}	...	t_{n1i}
y_{21}	t_{121}	t_{221}	...	t_{n21}	y_{22}	t_{122}	t_{222}	...	t_{n22}		y_{2i}	t_{12i}	t_{22i}	...	t_{n2i}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...	...	...
y_{m1}	t_{1m1}	t_{2m1}	...	t_{nm1}	y_{m1}	t_{1m2}	t_{2m2}	...	t_{nm2}		y_{mi}	t_{1mi}	t_{2mi}	...	t_{nmi}

Трехфакторная модель

Зависимость трех переменных вида $T = f(X, Y, Z)$, заданную в виде семейства математических матриц (по аналогии с табл. 1) или семейства функций одной переменной (по аналогии с табл. 2), представляющих собой зависимости вида $T_i = f(X_i, Y_i)$, каждая из которых справедлива для определенного значения z_i аргумента Z (табл. 3), также возможно аппроксимировать элементарной либо кусочно-заданной функцией при помощи рассматриваемых в настоящей статье программных продуктов.

Аппроксимация *кусочно-заданными* сплайн-функциями в программной среде Mathcad выполняется в несколько этапов. Сначала создается i-е число (в соответствии с количеством матриц исходных данных, табл. 3) аппроксимирующих двухфакторных зависимостей вида $t_i = f(x, y)$, каждая из которых будет справедлива для соответствующего значения z_i аргумента Z. Для этого могут быть применены алгоритмы, использование которых в настоящей статье рассмотрено на примере зависимостей $g_e = f(n, k)$ и $Q_0 = f(P, n)$.

Заключительным этапом аппроксимации является создание искомой функции согласно приведенному листингу:

$$Z := (z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_i)^{\mathrm{T}}, \tag{37}$$

$$Y(x, y) := (t_1(x, y) \quad t_2(x, y) \quad \ldots \quad t_i(x, y))^{\mathrm{T}}, \tag{38}$$

$$t(x, y, z) := \text{interp}\ (\text{cspline}(Z, Y(x, y)), Z, Y(x, y), z). \tag{39}$$

Аппроксимация *элементарными функциями* выполняется в три этапа. Первые два этапа направлены на создание i-го количества аппроксимирующих зависимостей вида $t_i = f(x, y)$ – построение каждой из которых осуществляется по аналогии с методикой (30)–(36). Важно, чтобы они имели между собой одинаковый общий вид, допустим, по примеру зависимости (36). Таким образом, результатом выполнения первых двух этапов будет являться система функций:

$$t = f(x, y, z) = \begin{cases} t_1 = f(x, y) = (a_{a1}y^2 + b_{a1}y + c_{a1})x + (a_{b1}y^2 + b_{b1}y + c_{b1}) & \text{для } z_1 \\ t_2 = f(x, y) = (a_{a2}y^2 + b_{a2}y + c_{a2})x + (a_{b2}y^2 + b_{b2}y + c_{b2}) & \text{для } z_2\,, \\ t_i = f(x, y) = (a_{ai}y^2 + b_{ai}y + c_{ai})x + (a_{bi}y^2 + b_{bi}y + c_{bi}) & \text{для } z_i \end{cases} \tag{40}$$

где $a_{a(1)} \ldots a_{a(i)}$, $b_{a(1)} \ldots b_{a(i)}$, $c_{a(1)} \ldots c_{a(i)}$, $a_{b(1)} \ldots a_{b(i)}$, $b_{b(1)} \ldots b_{b(i)}$, $c_{b(1)} \ldots c_{b(i)}$ – коэффициенты аппроксимации, которые могут быть получены в программной среде Microsoft Excel, CurveExpert и подобных продуктов.

Этап 3.

Третий этап является заключительным и направлен на получение гладкой функции также и по третьей переменной – в данном случае по z.

В соответствии с выражением (40), значения коэффициентов каждого уравнения находятся в зависимости от аргумента z:

$$a_a(z) = \begin{cases} a_{a1} \text{ для } z_1 \\ a_{a2} \text{ для } z_2 \\ a_{ai} \text{ для } z_i \end{cases}; \quad (41)$$

$$b_a(z) = \begin{cases} b_{a1} \text{ для } z_1 \\ b_{a2} \text{ для } z_2 \\ b_{ai} \text{ для } z_i \end{cases}; \quad (42)$$

$$c_a(z) = \begin{cases} c_{a1} \text{ для } z_1 \\ c_{a2} \text{ для } z_2 \\ c_{ai} \text{ для } z_i \end{cases}; \quad (43)$$

$$a_b(z) = \begin{cases} a_{b1} \text{ для } z_1 \\ a_{b2} \text{ для } z_2 \\ a_{bi} \text{ для } z_i \end{cases}; \quad (44)$$

$$b_b(z) = \begin{cases} b_{b1} \text{ для } z_1 \\ b_{b2} \text{ для } z_2 \\ b_{bi} \text{ для } z_i \end{cases}; \quad (45)$$

$$c_b(z) = \begin{cases} c_{b1} \text{ для } z_1 \\ c_{b2} \text{ для } z_2 \\ c_{bi} \text{ для } z_i \end{cases}. \quad (46)$$

Таким образом, искомая гладкая трехфакторная функция в общем виде может быть представлена выражением:

$$t = f(x, y, z) = (a_a(z)y^2 + b_a(z)y + c_a(z))x + (a_b(z)y^2 + b_b(z)y + c_b(z)). \quad (47)$$

В ходе третьего этапа выполняется аппроксимация зависимостей $a_a = f(z)$, $b_a = f(z)$, $c_a = f(z)$, $a_b = f(z)$, $b_b = f(z)$, $c_b = f(z)$ на основании данных (41)–(46). В случае, если для описания рассматриваемых функций достаточным будет применение линейных зависимостей, то итоговая аппроксимирующая функция будет иметь вид:

$$t = f(x, y, z) = ((a_{aa}z + b_{aa})y^2 + (a_{ba}z + b_{ba})y + (a_{ca}z + b_{ca}))x + ((a_{ab}z+b_{ab})y^2+(a_{bb}z+b_{bb})y+(a_{cb}z+b_{cb})). \quad (48)$$

Количество констант в формуле (48) составляет $p{\cdot}q{\cdot}s$ = 2 (линейная функция)·3 (полиномиальная 2-й степени)·2 (линейная функция) = 12, где p, q, s – количество постоянных в функциях каждого этапа аппроксимации.

При описании непрерывными гладкими функциями зависимостей $a_a = f(z)...c_b = f(z)$ также могут быть применены сплайн-функции в соответствии с алгоритмом (2)–(4).

Четырехфакторная модель

В табл. 4, в качестве примера, приведена зависимость четырех переменных вида $H = f(X, Y, Z, T)$, заданная в виде семейства математических матриц, представляющих собой зависимости вида $H_{ij} = f(X_{ij}, Y_{ij})$, каждая из которых справедлива для определенного сочетания значений z_i и t_j аргументов Z и T.

Описание четырехфакторной зависимости *кусочно-заданной* функцией с помощью программной среды Mathcad осуществляется в несколько этапов.

Этап 1.

В ходе первого этапа создается $i{\times}j$ количество (в соответствии с числом матриц исходных данных, табл. 4) аппроксимирующих двухфакторных зависимостей вида $h_{ij} = f(x, y)$, каждая из которых будет справедлива для определенного сочетания значений z_i и t_i аргументов Z и T соответственно. Для создания функций $h_{ij} = f(x, y)$ могут быть применены алгоритмы, использование которых в настоящей статье рассмотрено на примере зависимостей $g_e = f(n, k)$ и $Q_0 = f(P, n)$.

Далее, если $i = j$, то аппроксимация может быть выполнена по упрощенному алгоритму (по аналогии с (10)–(14)). При этом второй этап будет являться завершающим.

Этап 2.

$$Z := (z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \dots \quad z_n)^\text{T}; \quad (49)$$

$$T := (t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad t_n)^\text{T}; \quad (50)$$

$$ZT^{\langle 0 \rangle} := Z \quad ZT^{\langle 1 \rangle} := T; \quad (51)$$

$$H(x, y) := \begin{pmatrix} h_{11}(x, y) & h_{21}(x, y) & \dots & h_{i1}(x, y) \\ h_{12}(x, y) & h_{22}(x, y) & \dots & h_{i2}(x, y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1j}(x, y) & h_{2j}(x, y) & \dots & h_{ij}(x, y) \end{pmatrix}; \quad (52)$$

Таблица 4

Зависимость четырех переменных в виде семейства математических матриц

			Z													
			z_1					z_2						z_i		
			X_{11}					X_{21}						X_{i1}		
		Y_{11}	x_{111}	x_{211}	…	x_{n11}	Y_{21}	x_{121}	x_{221}	…	x_{n21}		Y_{i1}	x_{1i1}	x_{2i1}	…	x_{ni1}
	t_1	y_{111}	h_{1111}	h_{2111}	…	h_{n111}	y_{121}	h_{1121}	h_{2121}	…	h_{n121}		y_{1i1}	h_{11i1}	h_{21i1}	…	h_{n1i1}
		y_{211}	h_{1211}	h_{2211}	…	h_{n211}	y_{221}	h_{1221}	h_{2221}	…	h_{n221}		y_{2i1}	h_{12i1}	h_{22i1}	…	h_{n2i1}
		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…
		y_{m11}	h_{1m11}	h_{2m11}	…	h_{nm11}	y_{m11}	h_{1m21}	h_{2m21}	…	h_{nm21}		y_{mi1}	h_{1mi1}	h_{2mi1}	…	h_{nmi1}
			X_{12}					X_{22}						X_{i2}		
		Y_{12}	x_{112}	x_{212}	…	x_{n12}	Y_{22}	x_{122}	x_{222}	…	x_{n22}		Y_{i2}	x_{1i2}	x_{2i2}	…	x_{ni2}
	t_2	y_{112}	h_{1112}	h_{2112}	…	h_{n112}	y_{122}	h_{1122}	h_{2122}	…	h_{n122}		y_{1i2}	h_{11i2}	h_{21i2}	…	h_{n1i2}
		y_{212}	h_{1212}	h_{2212}	…	h_{n212}	y_{222}	h_{1222}	h_{2222}	…	h_{n222}		y_{2i2}	h_{12i2}	h_{22i2}	…	h_{n2i2}
T		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…
		y_{m12}	h_{1m12}	h_{2m12}	…	h_{nm12}	y_{m12}	h_{1m22}	h_{2m22}	…	h_{nm22}	…	y_{mi2}	h_{1mi2}	h_{2mi2}	…	h_{nmi2}
			X_{1j}					X_{2j}						X_{ij}		
		Y_{1j}	x_{11j}	x_{21j}	…	x_{n1j}	Y_{2j}	x_{12j}	x_{22j}	…	x_{n2j}		Y_{ij}	x_{1ij}	x_{2ij}	…	x_{nij}
	t_j	y_{11j}	h_{111j}	h_{211j}	…	h_{n11j}	y_{12j}	h_{112j}	h_{212j}	…	h_{n12j}		Y_{1ij}	h_{11ij}	h_{21ij}	…	h_{n1ij}
		y_{21j}	h_{121j}	h_{221j}	…	h_{n21j}	y_{22j}	h_{122j}	h_{222j}	…	$h_{\mathrm{n}22j}$		Y_{2ij}	h_{12ij}	h_{22ij}	…	h_{n2ij}
		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…
		y_{m1j}	h_{1m1j}	h_{2m1j}	…	h_{nm1j}	y_{m1j}	h_{1m2j}	h_{2m2j}	…	h_{nm2j}		y_{mij}	h_{1mij}	h_{2mij}	…	h_{nmij}

$$h(x,y,z,t) := \mathrm{interp}\left[\mathrm{cspline}(ZT, H(x,y)), ZT, H(x,y), \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right]. \quad (53)$$

Если $i \neq j$ или каждому значению аргумента j соответствует разное количество аргументов i, то добавляется третий этап. При этом второй этап имеет вид:

$$Z_1 := (z_1 \quad \mathrm{z}_2 \quad \mathrm{z}_3 \ldots \ \mathrm{z}_i)^{\mathrm{T}}; \quad (54)$$

$$H_1(x, y) := (h_{11}(x, y) \quad h_{21}(x, y) \quad \ldots \quad h_{i1}(x, y))^{\mathrm{T}}; \quad (55)$$

$$Z_2 := (z_1 \quad \mathrm{z}_2 \quad \mathrm{z}_3 \ldots \ \mathrm{z}_i)^{\mathrm{T}}; \quad (56)$$

$$H_1(x, y) := (h_{12}(x, y) \quad h_{22}(x, y) \quad \ldots \quad h_{i2}(x, y))^{\mathrm{T}}; \quad (57)$$

$$Z_j := (z_1 \quad \mathrm{z}_2 \quad \mathrm{z}_3 \ldots \ \mathrm{z}_i)^{\mathrm{T}}; \quad (58)$$

$$H_j(x, y) := (h_{1\mathrm{j}}(x, y) \quad h_{2\mathrm{j}}(x, y) \quad \ldots \quad h_{i\mathrm{j}}(x, y))^{\mathrm{T}}; \quad (59)$$

$$h_1(x, y, z) := \mathrm{interp}\ (\mathrm{cspline}(Z_1, H_1(x, y)), Z_1, H_1(x, y), z); \quad (60)$$

$$h_2(x, y, z) := \mathrm{interp}\ (\mathrm{cspline}(Z_2, H_2(x, y)), Z_2, H_2(x, y), z); \quad (61)$$

$$h_j(x, y, z) := \mathrm{interp}\ (\mathrm{cspline}(Z_j, H_j(x, y)), Z_j, H_j(x, y), z). \quad (62)$$

Этап 3.

Искомая аппроксимирующая функция определяется в соответствии с алгоритмом:

$$T := (t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_j)^{\mathrm{T}}; \tag{63}$$

$$H(x, y, z) := (\ h_1(x, y, z) \quad h_2(x, y, z) \quad \dots \quad h_j(x, y, z))^{\mathrm{T}} \tag{64}$$

$$h(x, y, z, t) := \mathrm{interp}\ (\mathrm{cspline}(T, H(x, y, z)),\ T,\ H(x, y, z),\ t). \tag{65}$$

Заключительный этап аппроксимации (выражения (63)—(65)) может быть тождественно заменен алгоритмом, выполняющим приведение матрицы исходных значений к квадратному виду:

$$Z := (z_1 \quad z_2 \quad z_3 \dots \ z_i)^{\mathrm{T}}; \tag{66}$$

$$T := (t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_j)^{\mathrm{T}}; \tag{67}$$

$$ZT^{\langle 0\rangle} := Z \quad ZT^{\langle 1\rangle} := T; \tag{68}$$

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} h_1(x,y,z_1) & h_1(x,y,z_2) & \dots & h_1(x,y,z_i) \\ h_2(x,y,z_1) & h_2(x,y,z_1) & \dots & h_2(x,y,z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_j(x,y,z_1) & h_j(x,y,z_1) & \dots & h_j(x,y,z_1) \end{pmatrix}; \tag{69}$$

$$h(x,y,z,t) := \mathrm{interp}\left[\mathrm{cspline}(ZT, H(x,y)), ZT, H(x,y), \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right]. \tag{70}$$

Аппроксимация четырехфакторной зависимости (табл. 4) *элементарными функциями* выполняется в три этапа.

Этап 1.

Направлен на создание $i \times j$ количества зависимостей $h_{ij} = f(x, y)$ одинакового общего вида (допустим, по примеру выражения (36)).

Этап 2.

Выполняется построение семейства аппроксимирующих зависимостей вида $h_j = f(x, y, z)$, каждая из которых создается по аналогии с выражением (48) и справедлива только для определенного значения t_j аргумента T (см. табл. 4):

$$h = f(x,y,z,t) = \begin{cases} h_1 = f(x,y,z) & \text{для } t_1 \\ h_2 = f(x,y,z) & \text{для } t_2 \\ \dots & \\ h_j = f(x,y,z) & \text{для } t_j \end{cases}. \tag{71}$$

Все функции вида $h_j(x, y, z)$ должны иметь одинаковый вид и, соответственно, идентичный набор разных по своему значению констант, которые в рассматриваемом случае будут являться функциями от значения t_j аргумента T.

Этап 3.

Для аналитического определения рассматриваемой зависимости четырех переменных (табл. 4), необходимо все постоянные уравнений $h_j(x, y, z)$ представить в виде функций от переменной t. Если в качестве соответствующих аппроксимирующих зависимостей будут выбраны полиномиальные функции 2-й степени, а зависимости $h_j(x, y, z)$ по набору констант будут соответствовать выражению (48), то итоговое количество коэффициентов в искомой зависимости $h = f(x, y, z, t)$ составит $p \cdot q \cdot s \cdot l = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ (где l — количество постоянных в каждой элементарной функции завершающего этапа процедуры аппроксимации).

В настоящей статье предложены различные методики автоматической аппроксимации дискретных множеств непрерывными гладкими зависимостями нескольких переменных в программной среде таких продуктов, как Microsoft Excel и Mathcad. Приведенные алгоритмы могут быть также реализованы и в аналогичных по назначению программах и их комплексах. Рассмотренные методики, в отличие от рекомендаций, изложенных в [1—5], характеризуются своей относительной гибкостью и позволяют работать с исходными дискретными множествами, представленными в различном виде; кроме того, имеется возможность применять различные типы аппроксимирующих кривых для каждой переменной в пределах создаваемой функции. Предложенные в статье методики могут быть также применены для создания на их базе алгоритмов для математического описания многофакторных зависимостей, имеющих более четырех аргументов.

В качестве практического примера рассмотрена аппроксимация функциями одной и двух переменных дискретных множеств, которые были получены в ходе проведения серии экспериментальных исследований в лаборатории автомобильных двигателей ГОУ ВПО «ДонНАСА». Полученные результаты характеризуются хорошей сходимостью с опытными данными (R = 0,925-1).

Процедура аппроксимации элементарными функциями рассмотрена на основе линейных зависимостей и многочленов. В соответствии с особенностями изучаемых физических процессов, подобным образом могут применяться и другие типы функций, например: рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985.

2. **Роджерс Д., Адамс Дж.** Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 с.

3. **Пащенко И.Г.** Excel. Шаг за шагом. М.: Эксмо, 2007. 352 с.

4. **Кирьянов Д.В.** Mathcad 14. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 704 с.

5. **Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П.** Пакет программ аппроксимации функций // Компьютерные средства, сети и системы. 2008. № 7. С. 32–37.

6. **Бурдун Г.Д., Макаров Б.Н.** Основы метрологии: Учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во стандартов, 1975. 366 с.

7. **Науменко А.М., Улитенко В.П.** Определение погрешностей технических измерений: Учеб. пособие. Харьков: Харьковский авиационный институт, 1982. 128 с.

8. **Новицкий П.В. Зограф И.А.** Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: ЛО Энергоатомиздат, 1985. 248 с.

9. **Савенков Н.В.** Оптимизация режимов силовой установки автомобиля для повышения его топливной экономичности // Автомобильная промышленность. 2016. № 6. С. 12–18.

10. **Савенков Н.В.** Определение расхода воздуха бензинового ДВС на неустановившихся режимах работы // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 2. С. 220–224.

11. **Савенков Н.В., Горожанкин С.А.** Определение расхода топлива бензинового ДВС с рампой тупикового типа при работе на переходных режимах // Вісник СНУ ім. Володимира Даля. 2013. № 15 (204) Ч. 2. С. 268–274.

REFERENCES

1. **Gill F., Myurrey U., Rayt M.** *Prakticheskaya optimizatsiya* [*Practical optimization*]. Moscow: Mir Publ., 1985. (rus)

2. **Rodzhers D., Adams Dzh.** *Matematicheskiye osnovy mashinnoy grafiki* [*Mathematical foundations of computer graphics*]. Moscow: Mir Publ., 2001, 604 p. (rus)

3. **Pashchenko I.G.** *Excel. Shag za shagom* [*Excel. Step by step*]. Moscow: Eksmo Publ., 2007, 352 p. (rus)

4. **Kiryanov D.V.** *Mathcad 14.* St. Petersburg : BKhV-Petersburg Publ., 2007, 704 p. (rus)

5. **Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal L.P.** Paket programm approksimatsii funktsiy [Package programs approximation of functions]. *Kompyuternyye sredstva, seti i sistemy.* 2008, No. 7, Pp. 32–37. (rus)

6. **Burdun G.D., Makarov B.N.** *Osnovy metrologii* [*Fundamentals of metrology*]. Moscow: Izdatelstvo standartov Publ., 1975, 366 p. (rus)

7. **Naumenko A.M., Ulitenko V.P.** *Opredeleniye pogreshnostey tekhnicheskikh izmereniy* [*Definition of the technical measurement errors*]. Kharkov: Kharkovskiy aviatsionnyy institute Publ., 1982, 128 p. (rus)

8. **Novitskiy P.V., Zograf I.A.** *Otsenka pogreshnostey rezultatov izmereniy* [*Evaluation of errors of measurement results*]. Leningrad: Energoatomizdat Publ., 1985, 248 p. (rus)

9. **Savenkov N.V.** Optimizatsiya rezhimov silovoy ustanovki avtomobilya dlya povysheniya yego toplivnoy ekonomichnosti [Optimization of the modes of the vehicle power plant for the increasing its fuel efficiency]. *Avtomobilnaya promyshlennost* [*Automotive industry*], 2016, No. 6, Pp. 12–18. (rus)

10. **Savenkov N.V.** Opredeleniye raskhoda vozdukha benzinovogo DVS na neustanovivshikhsya rezhimakh raboty [Assessment of air consumption of the internal combustion engine et transient operating modes]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov* [*Bulletin of Civil Engineers*], 2016, No. 2, Pp. 220–224. (rus)

11. **Savenkov N.V.**, **Gorozhankin S.A.** Opredeleniye raskhoda topliva benzinovogo DVS s rampoy tupikovogo tipa pri rabote na perekhodnykh rezhimakh [Assessment of fuel consumption of the petrol combustion engine with a ramp-type deadlock at work on transients]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov* [*Bulletin of Civil Engineers*], 2013, No. 15 (204), Part 2, Pp. 268–274. (ukr)

ГОРОЖАНКИН Сергей Андреевич – *заведующий кафедрой «Автомобили и автомобильное хозяйство» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, доктор технических наук.*
286123, Донецкая область, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2.
E-mail: gormar52@gmail.com

GOROZHANKIN Sergey A. *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture.*
286123, Derzhavina Str. 2, Makeevka, DPR.
E-mail: gormar52@gmail.com

ШИТОВ Анатолий Анатольевич – *доцент кафедры высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, кандидат физико-математических наук.*
286123, Донецкая область, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2.
E-mail: shitov@mail.ru

SHITOV Anatoly A. *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture.*
286123, Derzhavina Str. 2, Makeevka, DPR.
E-mail: shitov@mail.ru

САВЕНКОВ Никита Владимирович – *ассистент кафедры «Автомобили и автомобильное хозяйство» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры.*
286123, Донецкая область, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2.
E-mail: savenkovnv@yandex.ru

SAVENKOV Nikita V. *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture.*
286123, Derzhavina Str. 2, Makeevka, DPR.
E-mail: savenkovnv@yandex.ru