DOI: 10.5862/JCSTCS.247.3
УДК 621.0:519.873

В.Я. Копп, М.В. Заморёнов, Ю.Е. Обжерин, М.Ю. Ларин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ «ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ЯЧЕЙКА – НАКОПИТЕЛЬ»

V.Ya. Kopp, M.V. Zamoryonov, Yu.E. Objerin, M.Yu. Larin

USING THE METHOD OF TRAJECTORIES FOR CONSTRUCTING A SEMI-MARKOV MODEL OF A ‘TECHNOLOGICAL CELL – STORAGE DEVICE’ STRUCTURE

Приведена и доказана теорема о функциях распределения времени пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий. Доказательство теоремы базируется на теореме о математическом ожидании времени пребывания системы в заданном подмножестве состояний. Теорема может использоваться только для дискретных систем. В случае системы с непрерывным фазовым пространством состояний необходимо воспользоваться алгоритмом фазового укрупнения для приведения системы к дискретному виду. Приведен метод траекторий, позволяющий определять функцию распределения времени пребывания системы в подмножестве состояний. Данный метод позволяет не приближенно, а точно находить вид функции распределения времени пребывания системы в подмножестве состояний в области изображений по Лапласу. На конкретном примере функционирования структуры «технологическая ячейка – накопитель» с учетом надежности как ячейки, так и накопителя приведено сравнение метода траекторий и классического метода, использующего интегральные уравнения марковского восстановления.

ПОЛУМАРКОВСКАЯ СИСТЕМА; МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ; ПОВТОРНЫЕ ПОПАДАНИЯ.

The article presents and proves a theorem about the distribution functions for the times that the system spends in specific states taking into account the repeated enterings. The proof is based on the theorem of the mathematical expectation of the time the system spends in a given subset of states. The theorem can be used only for discrete systems. In the case of a system with a continuous phase space of states it is necessary to use the algorithm phase consolidation in order to bring the system to a discrete form. The trajectories method that allows to determine the distribution function for the time the system spends in a subset of states is presented. The current method gives the opportunity to not approximately but exactly determine the form of the distribution function for the time the system spends in a subset of states in the area of Laplace images. The trajectories method is compared to the classical method using integral Markov renewal equations on a specific example of the ‘technological cell – storage device’ structure with regard to the reliability of both the cell and the storage drive.

SEMI-MARKOV SYSTEM; METHOD OF TRAJECTORIES; REPEATED ENTERINGS.

В настоящее время аппарат полумарковских систем является мощным средством моделирования стохастических объектов, позволяющим учесть последействие в случайных процессах. Однако при необходимости определения функции распределения (ФР) времени пребывания системы в заданном подмножестве состояний получить точное решение не удается, т. к. для решения этой задачи используются уравнения марковского востановления (УМВ), система которых представляет собой уравнения Вольтера второго рода с полустохастическим ядром [1–9]. Эти уравнения решаются, как правило, методом последовательных приближений, получить их точное решение сложно. Поэтому практически не разработан аппарат определения ФР времени пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий за время их пребывания в заданном подмножестве.

Цель статьи – построение полумарковской модели структуры «технологическая ячейка – накопитель» на основе метода траекторий, позволяющей точно определять ФР времени пребывания системы в подмножестве работоспособных состояний.

Рассмотрим полумарковскую (ПМ) систему с общим фазовым пространством состояний M. Выделим в фазовом пространстве состояний M ПМ процесса два подмножества M_+ и M_-, таких, что $M_+ \cup M_- = M$. В дальнейшем будем говорить только про подмножество M_+, так как все сказанное будет верно и для подмножества M_-. Время однократного пребывания в состояниях $S_i \in M_+$ является случайной величиной (СВ) α_i, имеющей математические ожидания m_i, функции $F_i(t)$ и плотности $f_i(t)$ распределения, с изображениями в комплексной области $F_i(s)$ и $f_i(s)$ соответственно. СВ θ_Σ – время пребывания системы в подмножестве M_+, имеющая математическое ожидание T_+. Время многократного пребывания системы в состоянии $S_i \in M_+$ за счет повторных попаданий в них за время θ_Σ является СВ θ_i, имеющей математические ожидания m_i^θ, функции $F_i^\theta(t)$ и плотности $f_i^\theta(t)$ распределения, с изображениями в комплексной области $F_i^\theta(s)$ и $f_i^\theta(s)$ соответственно. Описываемому ПМ процессу соответствует распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ), характеризующееся удельными частотами ρ_i попадания в каждое из состояний $S_i \in M$, и вероятностями переходов P_{ij} из состояний $S_i \in M$ в состояния $S_j \in M$. Прямой переход из M_+ в M_- могут иметь не все состояния $S_i \in M_+$, тогда целесообразно выделить подмножество $E \subset M_+$ состояний $S_e \in E$ множества M_+, из которых возможен прямой переход во множество M_-.

Введем определение:

Траектория – множество состояний, в которых система должна побывать, чтобы выйти из подмножества M_+ в M_- (или наоборот), причем $M_+ \cup M_- = M$, где M – все фазовое пространство состояний.

Траектория пребывания системы в подмножестве M_+ начинается в состоянии, в которое есть прямой переход из подмножества M_-. Заканчивается такая траектория состоянием, из которого существует один или несколько прямых переходов в подмножество M_-.

Траектория выхода системы из подмножества M_+ начинается в любом состоянии этого подмножества и заканчивается состоянием, из которого есть один или несколько прямых переходов в подмножество M_-.

При решении поставленной задачи используется теорема о ФР времени пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий при условии, что система попадает в исследуемое состояние не менее одного раза.

Теорема о ФР времени пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий. Если в дискретной регенерирующей эргодической ПМ системе с известным стационарным распределением с состояниями $S_i \in M_+$ известны функции $F_i(t)$ и плотности $f_i(t)$ распределения, то функции $F_i^\theta(s)$ и плотности $f_i^\theta(s)$ распределения времени θ_i пребывания системы в состояниях S_i этой системы с учетом повторных попаданий в него при условии, что система попадает в это состояние не менее одного раза, в области изображений равны:

$$F_i^\theta(s) = \frac{F_i(s)}{c_i - (c_i - 1) f_i(s)}, \quad f_i^\theta(s) = \frac{f_i(s)}{c_i - (c_i - 1) f_i(s)}, \tag{1}$$

а в области оригинала они имеют вид:

$$F_i^{\theta}(t) = \frac{1}{c_i} F_i(t) + \frac{1}{c_i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c_i}\right)^m F_i^{(*)m}(t),$$
$$f_i^{\theta}(t) = \frac{1}{c_i} \cdot f_i(t) + \frac{1}{c_i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c_i}\right)^m f_i^{(*)m+1}(t), \qquad (2)$$

где $*$ – знак операции свертки; $c_i = \dfrac{m_i^{\theta}}{m_i}$ – коэффициент увеличения времени пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$ за счет повторных попаданий в него; m_i – математическое ожидание пребывания системы в состоянии S_i при однократном попадании в него; m_i^{θ} – математическое ожидание пребывания системы в состоянии S_i с учетом повторных попаданий в него, определяемое на основании теоремы [1]:

$$m_i^{\theta} = m_i \cdot \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}.$$

Доказательство. Время пребывания системы в состояниях ($S_i \in M_+$) увеличивается за счет повторных попаданий системы с какой-то вероятностью в эти состояния за время пребывания всей системы в подмножестве M_+, и больше ни за счет чего оно увеличиться не может, что очевидно. Но это означает, что число попаданий системы подчиняется геометрическому закону распределения с вероятностью P_i того, что система выйдет из этого состояния, а вероятность того, что останется в нем $1 - P_i$. При этом граф, описывающий поведение системы в данном состоянии при известной ФР $F_i(t)$ времени пребывания в данном состоянии S_i, имеет вид, представленный на рис. 1.

Приняты следующие условные обозначения: $S_{i,0}$ – мгновенное состояние соответствует выходу системы из состояния S_i;

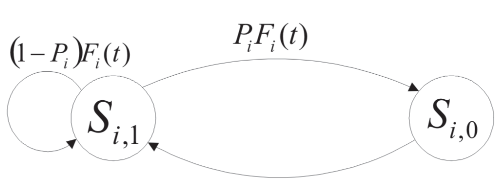

Рис. 1. Граф состояний, соответствующих геометрическому распределению

$S_{i,1}$ – исследуемое состояние S_i, суммарное время пребывания в котором определяется; P_i – вероятность перехода системы из $S_{i,1}$ в $S_{i,0}$; $(1 - P_i)$ – вероятность повторного попадания системы в состояние $S_{i,1}$; $F_i(t)$ – ФР СВ α_i, имеющей м.о. m_i.

По данному графу составляем УМВ:

$$F_i^{\theta}(t) = (1 - P_i) \int_0^t f_i(t - s) F_i^{\theta}(s) ds + P_i F_i(t). \qquad (3)$$

Итерируя полученное уравнение (3), имеем [10, 11]:

$$F_i^{\theta}(t) = P_i \cdot F_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m F_i^{(*)m}(t) =$$
$$= P_i F_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_i^{(*)m}(t) * F_i(t). \qquad (4)$$

Плотность распределения $f_i^k(t)$ имеет вид:

$$f_i^{\theta}(t) = P_i \cdot f_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_i^{(*)m+1}(t).$$

Здесь неизвестной величиной, которую необходимо определить, является P_i. Известно, что при геометрическом законе распределения $m_i^{\theta} = \dfrac{m_i}{P_i}$, отсюда следует:

$$P_i = \frac{m_i}{m_i^{\theta}}. \qquad (5)$$

Найдем m_i^{θ}. По известной теореме [1] можно точно определить T_+. Для дискретных состояний формула имеет вид:

$$T_+ = \frac{\sum\limits_{i \in M_+} m_i \rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_i} = \sum_{e \in M_+} m_i \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}.$$

Тогда

$$m_i^{\theta} = m_i \cdot \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}. \qquad (6)$$

Введем коэффициент c_i увеличения времени пребывания системы в состояниях S_i, равный

$$c_i = \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}.$$

Тогда $m_i^{\theta} = m_i \cdot c_i$, а вероятность P_i определяется из условия обеспечения увеличения m_i до величины m_i^θ, откуда следует, что искомая вероятность P_i, исходя из (5), равна

$$P_i = \frac{m_i}{m_i^\theta} = \frac{1}{c_i}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получаем (2).

Применяя к формуле (4) преобразование Лапласа, получим:

$$F_i^\theta(s) = P_i F(s) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1-P_i)^m f_i^m(s) F(s) =$$
$$= P_i F(s) + P_i F(s) \sum_{m=1}^{\infty} (1-P_i)^m f_i^m(s) = \quad (8)$$
$$= P_i F_i(s) \sum_{m=0}^{\infty} (1-P_i)^m f_i^m(s).$$

Полученное выражение представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Возьмем предел выражения $\sum_{m=0}^{\infty} (1-P_i)^m f^m(s)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} (1-P_i)^m f_i^m(s) = \frac{1}{1-(1-P_i) f_i(s)}.$$

Тогда выражение (8) будет иметь вид:

$$F_i^\theta(s) = \frac{P_i F_i(s)}{1-(1-P_i) f_i(s)}. \quad (9)$$

Соответственно изображение ПР $f_i^\theta(t)$ будет иметь вид:

$$f_i^\theta(s) = \frac{s P_i F_i(s)}{1-(1-P_i) f_i(s)} = \frac{P_i f_i(s)}{1-(1-P_i) f_i(s)}. \quad (10)$$

Подставляя (7) в (9) и (10), получим:

$$F_i^\theta(s) = \frac{\frac{1}{c_i} F_i(s)}{1-\left(1-\frac{1}{c_i}\right) f_i(s)} = \frac{F_i(s)}{c_i - (c_i - 1) f_i(s)},$$

$$f_i^\theta(s) = \frac{\frac{1}{c_i} f_i(s)}{1-\left(1-\frac{1}{c_i}\right) f_i(s)} = \frac{f_i(s)}{c_i - (c_i - 1) f_i(s)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. В случае, когда система при попадании в подмножество M_+ может не попадать в состояние $S_i \in M_+$, коэффициент c_i увеличения времени пребывания системы в состояниях S_i будет равен:

$$c_i = \frac{m_i^\theta}{P_i \cdot m_i},$$

где P_i – вероятность попадания системы в состояние S_i, за время пребывания в подмножестве M_+.

Следствие 2. Время θ_k^T пребывания системы в траектории равно сумме всех СВ θ_i $\theta_k^T = \sum_1^n \theta_i$, а значит, ФР F_k^T времени θ_k^T – пребывания системы в траектории, равно последовательной свертке всех ФР F_i^θ :

$$F_k^T = F_0^\theta * F_1^\theta * F_2^\theta * \ldots * F_i^\theta * \ldots * F_n^\theta,$$

где n – число состояний, входящих в траекторию.

Следствие 3. На основании формулы полной вероятности выражение для определения ФР θ_Σ времени пребывания системы в подмножестве M_+ имеет вид:

$$F_\Sigma = P_1^T \cdot F_1^T + P_2^T \cdot F_2^T + P_3^T \cdot F_3^T + \ldots$$
$$+ P_i^T \cdot F_i^T + \ldots + P_n^T \cdot F_n^T,$$

где P_i^T – вероятность реализации i-й траектории; F_i^T – ФР времени пребывания системы в i-й траектории.

Следствие 4. Исходя из следствия 3 данной теоремы, взвешенная сумма всех ФР времени пребывания системы в траекториях выхода из состояния $S_i \in M_+$ является ФР времени пребывания системы в подмножестве M_+ с начальным состоянием S_i, а значит, представляет собой решение уравнения марковского восстановления для этого состояния.

В работах [12, 13] предложен метод траекторий для определения ФР времени пребывания системы в подмножестве состояний с учетом повторных попаданий в них. Метод базируется на теореме о времени пребывания системы в состояниях подмножества с учетом повторных попаданий в них при условии, что система попадает в исследуемое состояние заданного подмножества хотя бы один раз при каждом попадании в это подмножество.

Метод траекторий

Шаг 1. Переход от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями $S_i \in M_+$ на основании алгоритма фазового укрупнения [2]. При этом определяются ФР F_i времени пребывания системы в новых дискретных состояниях, вероятности перехода P_{ij} из этих состояний в другие состояния (переходные вероятности) удельные частоты ρ_i попадания в состояния (стационарное распределение ВЦМ) и стационарные вероятности пребывания в состояниях (стационарное распределение ПМ процесса). Процедура проводится известными методами моделирования ПМ систем.

Шаг 2. Выделение всех возможных траекторий перехода системы из подмножества M_+ в подмножество M_-. Причем каждое состояние системы входит в одну или несколько траекторий сразу.

Шаг 3. Определяются вероятности P_i попадания в состояния $S_i \in M_+$ хотя бы один раз за время пребывания системы в подмножестве M_+.

Шаг 4. На основании изложенной выше теоремы заменяется время пребывания в состояниях α_i на θ_i: для них определяются плотности и ФР времени пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$ с учетом повторных возвратов в соответствии с приведенной теоремой, для чего определяются коэффициенты c_i увеличения времени пребывания системы в состояниях.

Шаг 5. Выделяются траектории. В соответствии с теоремой о полной вероятности [14], определяются вероятности P_k^T реализации каждой из траекторий, на основании переходных вероятностей вложенной цепи Маркова.

Шаг 6. В соответствии со следствием 2 приведенной выше теоремы, находим ФР времени пребывания системы в каждой из траекторий.

Шаг 7. Находим ФР времени пребывания в M_+ вне зависимости от начального состояния, которая определяется, как взвешенная сумма (смесь) ФР каждой из траекторий. Коэффициентами смеси служат найденные на пятом шаге вероятности P_k^T реализации траекторий.

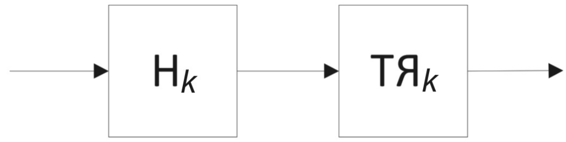

Рис. 2. Структура Н-ТЯ, работающая на прием продукции

Рассмотрим на конкретном примере реализацию предлагаемого метода моделирования.

Формализуем постановку задачи, для чего рассмотрим структуру «технологическая ячейка — накопитель» [15—17] с учетом отказов не только ячейки, но и накопителя (рис. 2).

Пусть известны ФР $F_{01}(t)$ и $F_{10}(t)$ случайных величин ξ_1 и η_1, которыми являются время наработки на отказ и восстановления ТЯ соответственно, а также ФР $F_{03}(t)$ и $F_{30}(t)$ случайных величин ξ_3 и η_3, являющихся временем наработки на отказ и восстановления накопителя. Кроме этого, известна ФР $F_{12}(t)$ случайной величины ξ_2, являющейся временем резерва.

Введены допущения: вероятностью одновременного отказа ячейки и накопителя пренебрегаем ввиду малой вероятности этого события; ФР $F_{01}(t)$ и $F_{03}(t)$ считаются распределенными экспоненциально. Необходимо определить ФР времени наработки на отказ и восстановления участка в целом, т. е. эквивалентно заменить его простейшим элементом, имеющим два факторных состояния.

Решение поставленной задачи с использованием приведенной теоремы осуществляется в следующей последовательности.

1. Построим граф состояний исследуемой системы (рис. 3), учитывая, что она является полумарковской системой с непрерывными состояниями.

Состояния системы: S_0 — ТЯ исправна, накопитель исправен, временной задел в накопителе ξ_2, состояние работоспособное; S_1 — ТЯ отказала, накопитель исправен, временной задел в накопителе ξ_2, состояние работоспособное; S_{2x} — ТЯ в отказе, накопитель исправен, резерв времени израсходован, поскольку запас продукции в

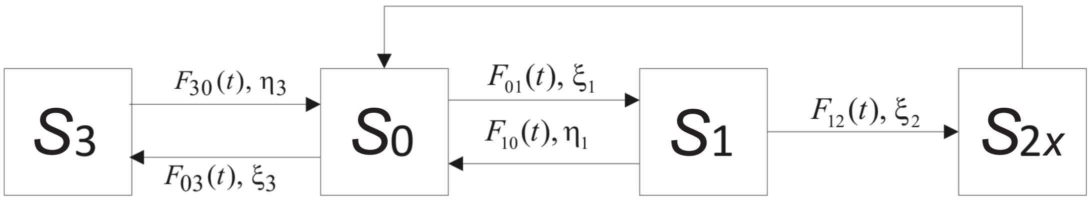

Рис. 3. Граф состояний системы

накопителе исчерпан ($\xi_2 = 0$), состояние не работоспособное; S_3 – ТЯ исправна, накопитель отказал, состояние не работоспособное.

2. Определим время пребывания системы в состояниях и ФР времени пребывания системы в состояниях.

Время пребывания в состояниях S_0, S_1, S_{2x} и S_3 определим из выражений:

$$\theta_0 = (\xi_1 \wedge \xi_3);\ \theta_1 = (\eta_1 \wedge \xi_2);$$
$$\theta_{2x} = x;\ \theta_3 = \eta_2,$$

где $\wedge$ – знак, обозначающий минимум случайных величин.

Тогда функции распределения времени пребывания в состояниях имеют следующий вид:

для состояния S_0: $\bar{F}_0(t) = \bar{F}_{01}(t) \cdot \bar{F}_{03}(t)$;

для состояния S_1: $\bar{F}_1(t) = \bar{F}_{10}(t) \cdot \bar{F}_{12}(t)$;

для состояния S_{2x}: $F_{2x}(t) = 1_x(t)$,

где $1_x(t) = \begin{cases} 0, t < x; \\ 1, t \ge x. \end{cases}$

для состояния S_3: $F_3(t) = F_{30}(t)$.

3. Найдем вероятности перехода ВЦМ:

$$\begin{cases} P_0^1\{\xi_1 < \xi_3\} = \int\limits_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z)dz \\ P_0^3\{\xi_1 > \xi_3\} = \int\limits_0^\infty F_{03}(t) f_{01}(t)dt \\ P_1^0 = \int\limits_0^\infty F_{10}(t) f_{12}(t)dt \\ p_1^{2x} = \int\limits_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t)dt \\ P_{2x}^0 = 1 \\ P_3^0 = 1 \end{cases} . \qquad (11)$$

4. Определим стационарное распределение ВЦМ, позволяющее при необходимости найти стационарное распределение полумарковских процессов (ПМП).

Стационарное распределение $\rho(x)$ вложенной цепи Маркова определяется по формуле $\rho(x) = \int\limits_x p(x, y)\rho(y)dy$, где $p(x, y)$ – плотность вероятности перехода вложенной цепи Маркова.

Используя систему (11), запишем систему уравнений для определения стационарного распределения вложенной $\rho(x)$ цепи Маркова:

$$\begin{cases} \rho_0 = \int\limits_0^\infty \rho_{2x} \cdot 1_x(t)dx + \rho_3 \cdot 1 + \\ + \rho_1 \int\limits_0^\infty F_{10}(w) f_{12}(w)dw \\ \rho_1 = \rho_0 \int\limits_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z)dz = \rho_0 P\{\xi_1 < \xi_3\} \\ \rho_{2x} = \rho_1 \int\limits_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t)dt \\ \rho_3 = \rho_0 \int\limits_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u)du \end{cases} . \qquad (12)$$

Условие нормировки:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \rho_{2x}dx + \rho_3 + \rho_1 \int\limits_0^\infty F_{10}(w) f_{12}(w)dw + \\ &+ \rho_0 \int\limits_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z)dz + \\ &+ \int\limits_0^\infty \rho_1 \int\limits_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t)dtdx + \\ &+ \rho_0 \int\limits_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u)du = 1. \end{aligned} \qquad (13)$$

Выразим ρ_{2x} через ρ_0, ρ_1 и ρ_3:

$$\rho_{2x} = \rho_1 \int\limits_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t)dt =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt.$$

Тогда условие нормировки (13) примет вид:

$$\int_0^\infty \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt dx +$$
$$+ \rho_0 \int_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u) du +$$
$$+ \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty F_{10}(w) f_{12}(w) dw +$$
$$+ \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz +$$
$$+ \int_0^\infty \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt dx +$$
$$+ \rho_0 \int_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u) du = 1.$$

Решая (12), получим:

$$\begin{cases} \rho_0 = \dfrac{1}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_1 = \dfrac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_{2x} = \dfrac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_3 = \dfrac{\int_0^\infty \bar{F}_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}. \end{cases}$$

Можно выразить значения ρ_2, ρ_1, и ρ_3 через ρ_0:

$$\rho_1 = \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz,$$
$$\rho_2 = \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt,$$
$$\rho_3 = \rho_0 \int_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u) du.$$

5. Используя алгоритм фазового укрупнения [2] перейдем от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями.

Для нахождения функции распределения времени наработки на отказ (времени непрерывной работы системы) необходимо воспользоваться стационарным алгоритмом фазового укрупнения устойчивых состояний [2] для того, чтобы перейти от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями.

Сначала найдем стационарное распределение ВЦМ $\hat{\rho}_2$ для укрупненного состояния S_2:

$$\hat{\rho}_2 = \int_0^\infty \rho_{2x} dx =$$
$$= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt dx}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt} =$$
$$= \frac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \bar{F}_{10}(t) f_{12}(t) dt}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}.$$

Тогда стационарное распределение ВЦМ примет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 = \dfrac{1}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_1 = \dfrac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_2 = \dfrac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}; \\ \rho_3 = \dfrac{\int_0^\infty \bar{F}_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2 + \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt}. \end{cases}$$

Следующим шагом является определение вероятностей переходов укрупненной системы:

$$\widehat{P}_1^2 = \frac{\int_0^\infty p_1^{2x} \rho_1 dx}{\rho_1} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt dx = \int_0^\infty \overline{F}_{10}(t) f_{12}(t) dt.$$

Тогда вероятности переходов примут вид:

$$\begin{cases} P_0^1\{\xi_1 < \xi_3\} = \int_0^\infty f_{01}(z)\overline{F}_{03}(z)dz; \\ P_0^3\{\xi_1 > \xi_3\} = \int_0^\infty \overline{F}_{01}(t) f_{03}(t)dt; \\ P_1^0 = \int_0^\infty f_{10}(t)\overline{F}_{12}(t)dt; \\ P_1^2 = \int_0^\infty \overline{F}_{10}(x) f_{12}(t)dt; \\ P_2^0 = 1; \\ P_3^0 = 1. \end{cases}$$

Найдем ФР времени пребывания системы в укрупненном дискретном состоянии S_2:

$$\widehat{F}_2(t) = \frac{\int_0^\infty F_{2x}(t)\rho_{2x} dx}{\rho_2} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty 1_x(t) \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty f_{10}(x+y) f_{12}(y) dy dx}{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \overline{F}_{10}(y) f_{12}(y) dt} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \left[\overline{F}_{10}(t) - \overline{F}_{10}(t+y)\right] f_{12}(y) dy}{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \overline{F}_{10}(y) f_{12}(y) dt}.$$

ФР времени пребывания системы в укрупненном дискретном состоянии S_2 имеет вид:

$$\widehat{F}_2(t) = 1 - \frac{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \overline{F}_{10}(t+y) f_{12}(y) dy}{\int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^\infty \overline{F}_{10}(y) f_{12}(y) dy}.$$

6. Определим вероятности P_i попадания системы в состояния S_i на основании вероятностей перехода ВЦМ подмножества M_+

$$P_0 = 1; \;\; P_1 = P_0^1.$$

7. Используя приведенную выше теорему о ФР времени пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий, определим ФР $F_0^\theta(t)$ и $F_1^\theta(t)$ времени пребывания в состояниях S_0 и S_1 с учетом повторных попаданий в них за время пребывания в подмножестве M_+, при условии, что система хотя бы один раз попадает в них:

$$F_0^\theta(s) = \frac{F_0(s)}{c_0 - (c_0 - 1) f_0(s)};$$

$$F_1^\theta(s) = \frac{F_1(s)}{c_1 - (c_1 - 1) f_1(s)},$$

где

$$c_0 = \frac{m_0^\theta}{P_0 m_0}, \;\; c_1 = \frac{m_1^\theta}{P_1 m_1}.$$

8. Выделим траектории. В соответствии с теоремой о полной вероятности, определим вероятности P_k^T реализации каждой из траекторий на основании переходных вероятностей вложенной цепи Маркова:

$$T_1 = \{S_0\}; \; T_2 = \{S_0, S_1\};$$

$$P_1^T = P_0^3; \; P_2^T = P_0^1.$$

9. Определим ФР времени пребывания системы в траекториях:

$$F_1^T = F_0^\theta; \; F_2^T = F_0^\theta * F_1^\theta.$$

10. Найдем ФР времени пребывания в M_+ вне зависимости от начального состояния:

$$F_\Sigma = P_1^T \cdot F_1^T + P_2^T \cdot F_2^T.$$

Рассмотрим пример моделирования такой системы с известными параметрами распределения случайных величин.

Исходными данными для моделирования служат функции распределения $F_{01}(t)$, $F_{03}(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{12}(t)$; они распределены по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами λ_{01}, λ_{03}; μ_1, μ_2; υ_1, υ_2 соответственно, причем

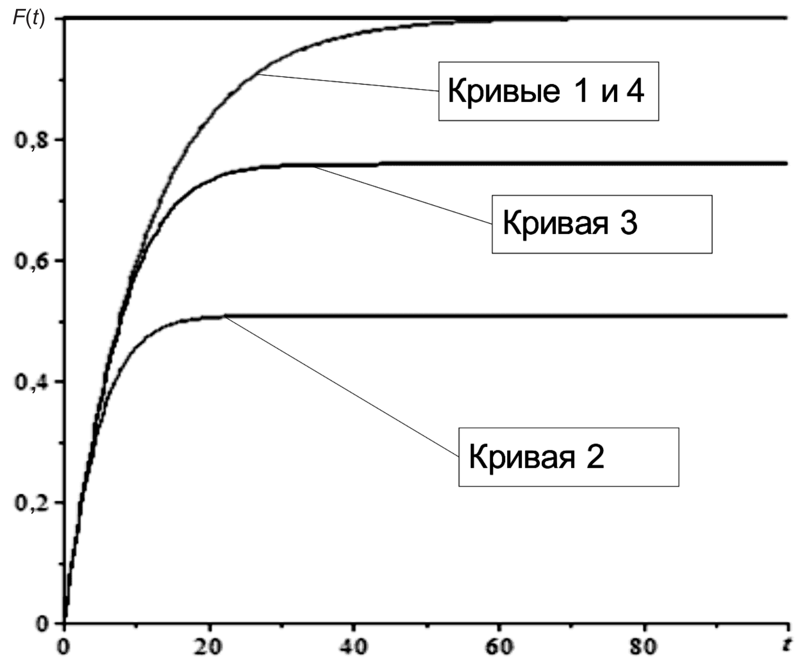

Рис. 4. Вид функций распределения
кривая 1 — $F_\Sigma(t)$; кривая 2 — $\varphi_0(t)$ при одной свертке; кривая 3 — $\varphi_0(t)$ при трех свертках; кривая 4 — $\varphi_0(t)$ при 15 свертках

$$f_{01}(t) = \lambda_{01} e^{-\lambda_{01} t},$$

где $\lambda_{01} = 0{,}1250$ ч$^{-1}$;

$$f_{03}(t) = \lambda_{03} e^{-\lambda_{03} t},$$

где $\lambda_{03} = 0{,}0625$ ч$^{-1}$;

$$f_{10}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{\mu_2 - \mu_1},$$

где $\mu_1 = 0{,}3333$ ч$^{-1}$, $\mu_2 = 1{,}000$ ч$^{-1}$;

$$f_{12}(t) = \frac{\upsilon_1 \upsilon_2 (e^{-\upsilon_1 t} - e^{-\upsilon_2 t})}{\upsilon_2 - \upsilon_1},$$

где $\upsilon_1 = 1{,}1$ ч$^{-1}$, $\upsilon_2 = 10{,}9$ ч$^{-1}$.

Необходимо определить ФР F_Σ времени пребывания системы в подмножестве M_+ работоспособных состояний.

В работах [18] приведено решение для ФР времени пребывания системы в подмножестве M_+, полученной на основании метода, использующего уравнения марковского восстановления:

$$\varphi_0(t) = \Phi(t) + \int_0^t h(t-x)\Phi(x)dx,$$

где $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(f_{01}\overline{F}_{03}) * (f_{10}\overline{F}_{12})]^{(*)n}(x)$; $*$ — знак операции свертки; $\Phi(t) = \int_0^t \overline{F}_{10}(y) f_{12}(y) dy \times \int_0^{t-y} f_{01}(x)\overline{F}_{03}(x)dx + \int_0^t \overline{F}_{01}(x) f_{03}(x) dx.$

На рис. 4 приведена функция распределения, полученная в данной статье (кривая 1), а также ФР, полученные на основании известного метода, использующего интегральные уравнения марковского восстановления.

Как видно из графика, в зависимости от количества членов ряда (кривые 2, 3, 4), эти решения стремятся к полученному точному решению.

Сравним значения математического ожидания полученной нами функции и математического ожидания, определяемого с помощью выражения [1]:

$$T_+ = \frac{\sum_{i \in M_+} m_i \rho_i}{\sum_{e \in E \subset M_+} \sum_{j \in M_-} P_{ej} \rho_i}. \quad (14)$$

Математическое ожидание полученной нами функции распределения составляет

11,2166744856 ч, тогда как определяемое с помощью выражения (14) составляет 11,2166744856 ч.

Нетрудно констатировать, что математические ожидания совпадают.

Полученные результаты подтверждают правильность предложенного метода траекторий, предназначенного для определения ФР времени пребывания системы в подмножестве состояний. В дальнейшем планируется исследовать применение метода для моделирования систем контроля и технического обслуживания в автоматизированном производстве.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по базовой части государственного задания № 2014/702 проект № 3858 и при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 15-01-05840.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Королюк В.С., Турбин А.Ф.** Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982. 236 с.

2. **Королюк В.С.** Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.

3. **Obzherin Yu.E., Boyko E.G.** Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures. USA, Elsevier: Academic Press, 2015. 214 p.

4. **Peschansky A.I.** Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input. Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. 138 p.

5. **Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.** Моделирование автоматизированных линий. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. 240 с.

6. **Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.** Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2000. 284 с.

7. **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

8. **Райншке К., Ушаков И.А.** Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

9. **Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б.Г.** Расчет и планирование испытаний систем на надежность. Киев: Наук. думка, 1970. 192 с.

10. **Михлин С.Г.** Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: Гостехиздат, 1949. 380 с.

11. **Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.** Интегральные уравнения. М.: Наука, Гл. ред. Физматлит, 1968. 448 стр.

12. **Копп В.Я., Заморенов М.В., Обжерин Ю.Е., Филипович О.В.** Методы моделирования полумарковских систем // Адаптивні системи автоматичного управління: Міжвідомчий науково-технічний збірник. Дніпропетровськ, 2015. Вип. №1(26). С. 208–221.

13. **Заморёнов М.В., Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Заморёнова Д.В.** Апробация метода траекторий на примере моделирования процесса функционирования производственного элемента с обесценивающими отказами // Известия ТулГУ. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. Вып. 8. Ч. 1. С. 57–71.

14. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд., стер. М.: Высш. школа, 1999. 576 с.

15. **Черкесов Г.Н.** Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Сов. радио, 1974. 296 с.

16. **Черкесов Г.Н.** Современное состояние теории и практики надежности многофазных систем с накопителями // Надежность и контроль качества. 1986. № 10. С. 3–7.

17. **Ганин Н.М., Катковник В.Я.** Сетевые модели функционирования ГПС с ограниченными накопителями // Машиностроение. 1988. № 2. С. 26–32.

18. **Копп В.Я., Карташов А.Л., Заморёнов М.В., Клюкин В.Ю.** Полумарковская модель структуры «технологическая ячейка – накопитель». Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2016. № 1(237). С. 16–28.

REFERENCES

1. **Korolyuk V.S., Turbin A.F.** *Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti system* [*Markov renewal processes in systems reliability problems*]. Kiyev: Nauk. Dumka Publ., 1982, 236 p. (rus)

2. **Korolyuk V.S.** *Stokhasticheskiye modeli sistem*

[*Stochastic models of systems*]. Kiyev: Nauk. Dumka Publ., 1989, 208 p. (rus)

3. **Obzherin Yu.E., Boyko E.G.** *Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures*. USA, Elsevier: Academic Press, 2015, 214 p.

4. **Peschansky A.I.** *Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input.* Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. 138 p.

5. **Kopp V.Ya., Obzherin Yu.Ye., Peschanskiy A.I.** *Modelirovaniye avtomatizirovannykh liniy* [*Simulation of automated production lines*]. Sevastopol: SevNTU Publ., 2006, 240 p. (rus)

6. **Kopp V.Ya., Obzherin Yu.Ye., Peschanskiy A.I.** *Stokhasticheskiye modeli avtomatizirovannykh proizvodstvennykh sistem s vremennym rezervirovaniyem* [*Stochastic models of automated production systems to reservation time*]. Sevastopol: SevNTU Publ., 2000, 284 p. (rus)

7. **Baykhelt F., Franken P**. *Nadezhnost i tekhnicheskoye obsluzhivaniye. Matematicheskiy podkhod* [*Reliability and Maintenance. The mathematical approach*]. Per. s nem. Moscow: Radio i svyaz Publ., 1988, 392 p. (rus)

8. **Raynshke K., Ushakov I.A.** *Otsenka nadezhnosti sistem s ispolzovaniyem grafov* [*Evaluation of reliability of systems using graphs*]. Moscow: Radio i svyaz Publ., 1988. 208 p. (rus)

9. **Brodi S.M., Vlasenko O.N., Marchenko B.G.** *Raschet i planirovaniye ispytaniy sistem na nadezhnost* [*Calculation and planning reliability tests systems*]. Kiyev: Naukova dumka Publ., 1970, 192 p. (rus)

10. **Mikhlin S.G.** *Integralnyye uravneniya i ikh prilozheniya k nekotorym problemam mekhaniki, matematicheskoy fiziki i tekhniki* [*Integral equations and their applications to some problems of mechanics, mathematical physics and engineering*]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1949, 380 p. (rus)

11. **Zabreyko P.P., Koshelev A.I., Krasnoselskiy M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.Ya.** *Integralnyye uravneniya* [*Integral equations*]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 448 p. (rus)

12. **Kopp V.Ya., Zamorenov M.V., Obzherin Yu.Ye., Filipovich O.V.** Metody modelirovaniya polumarkovskikh system [Simulation methods of semi-Markov Systems]. *Adaptivni sistemi avtomatichnogo upravlinnya.* Dnipropetrovsk, 2015, Vol. 1(26), Pp. 208–221. (ukr)

13. **Zamorenov M.V., Kopp V.Ya., Obzherin Yu.Ye., Zamorenova D.V.** Aprobatsiya metoda trayektoriy na primere modelirovaniya protsessa funktsionirovaniya proizvodstvennogo elementa s obestsenivayushchimi otkazami [Approbation of the trajectories method by the example of the modeling of the functioning process of the production element with depreciative failures]. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki.* Tula: TulGU Publ., 2015, Vol. 8, Part 1, Pp. 57–71. (rus)

14. **Venttsel Ye.S.** *Teoriya veroyatnostey* [*Theory of chances*]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1999, 576 p. (rus)

15. **Cherkesov G.N.** *Nadezhnost tekhnicheskikh sistem s vremennoy izbytochnostyu* [*Reliability of technical systems with time redundancy*]. Moscow: Sovetskoye radio Publ., 1974, 296 p. (rus)

16. **Cherkesov G.N.** Sovremennoye sostoyaniye teorii i praktiki nadezhnosti mnogofaznykh sistem s nakopitelyami [The current state of theory and practice of the reliability of multiphase systems with hard drives]. *Nadezhnost i kontrol kachestva* [*Reliability and Quality Control*], 1986, No. 10, Pp. 3–7. (rus)

17. **Ganin N.M., Katkovnik V.Ya.** Setevyye modeli funktsionirovaniya GPS s ogranichennymi nakopitelyami [Network models of GPS operation with limited storage devices]. *Mashinostroyeniye*, 1988, No. 2, Pp. 26–32. (rus)

18. **Kopp V.Ya., Kartashov A.L., Zamorenov M.V., Klyukin V.Yu.** Polumarkovskaya model struktury tekhnologicheskaya yacheyka – nakopitel [The semi-markov model for the ‘technological module – storage device’ structure]. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskiye nauki* [*St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*], 2016, No. 1(237), Pp. 16–28. (rus)

КОПП Вадим Яковлевич – *профессор кафедры приборных систем и автоматизации технологических процессов Севастопольского государственного университета, доктор технических наук.*

299053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33.

E-mail: volkov-and@yandex.ru

KOPP Vadim Ya. *Sevastopol State University.*

299053, Universitetskaja Str. 33, Sevastopol, Russia.

E-mail: volkov-and@yandex.ru

ЗАМОРЁНОВ Михаил Вадимович – *доцент кафедры приборных систем и автоматизации технологических процессов Севастопольского государственного университета, кандидат технических наук.*
299053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33.
E-mail: zamoryonoff@gmail.com

ZAMORYONOV Mikhail V. *Sevastopol state university.*
299053, Universitetskaja Str. 33, Sevastopol, Russia.
E-mail: zamoryonoff@gmail.com

ОБЖЕРИН Юрий Евгеньевич – *заведующий кафедрой высшей математики Севастопольского государственного университета, доктор технических наук.*
299053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33.
E-mail: objsev@mail.ru

OBJERIN Yuriy E. *Sevastopolskii gosydarstvennii yniversitet.*
299053, Universitetskaja Str. 33, Sevastopol, Russia.
E-mail: objsev@mail.ru

ЛАРИН Михаил Юрьевич – *младший научный сотрудник кафедры «Автоматы» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*
195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
E-mail: kai-desu@mail.ru

LARIN Mikhail Yu. *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*
195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.
E-mail: kai-desu@mail.ru