



# Моделирование вычислительных, телекоммуникационных, управляющих и социально-экономических систем

DOI: 10.5862/JCSTCS.234.4

УДК 519.6:527

*В.А. Ботнев, С.М. Устинов*

## **МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ЛИНИЕЙ В ГЕОДЕЗИИ**

*V.A. Botnev, S.M. Ustinov*

## **A METHOD FOR FINDING THE DISTANCE BETWEEN A POINT AND A LINE IN GEODESY INTELLECTUAL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES**

Предложена эффективная методика определения расстояния между траекторией и точкой на поверхности сфероида для решения последующих задач управления. Получены оценки погрешности решения при использовании сферического приближения. Оценен выигрыш во времени при задействовании гномонической проекции с начальным сферическим приближением и без него. Выявлены границы применимости сферического приближения и гномонической проекции в рамках представленной методики. Указаны причины возникновения и метод выявления многоэкстремальности в предложенной задаче. Представлен алгоритм ее решения в этих условиях. Методика демонстрирует высокую точность решения, может быть рекомендована для использования в коммерческих навигационных и геодезических программных продуктах, удовлетворяющих международным стандартам, и распространена на задачи управления, связанные с перехватом цели.

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ; ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ; ЛОКСОДРОМИЯ; ОРТОДРОМИЯ; ЗАДАЧИ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ.**

An efficient method for determining the distance between a trajectory and a point on the surface of a spheroid is proposed to address some ensuing control problems. An error assessment for the spherical approximation is obtained. The time gained through applying the gnomonic projection with the initial spherical approximation and without it is estimated. The limits of applicability of the spherical and the gnomonic projections for the method are shown. Detection of multiple extrema in the proposed problem and the causes of their occurrence are described. The algorithm for the solution of this problem under such conditions is suggested. The method demonstrates high accuracy of the solution and can be recommended for use in commercial navigation and geodetic software products that comply with international standards. The technique extends to control problems associated with target intercepting.

**MODELING METHODS; GEODESIC PROBLEMS; LOXODROME; ORTHODROME; MULTI-EXTREMAL OPTIMIZATION PROBLEMS.**

Решение прямой и обратной геодезических задач занимает важное место в приложениях геодезии и навигации [10, 13]. Как известно, прямая задача определяет положение точки после смещения под заданным углом и на заданное расстояние из некоторой начальной точки. Обратная за-

дача ставит своей целью найти расстояние между заданными точками и азимут из первой точки на вторую.

Существуют два наиболее часто используемых типа линий на поверхности Земли: ортодрома и локсодрома. В первом случае линия (ортодрома) является кратчайшим

путем из одной точки в другую по поверхности Земли. Во втором случае в силу ряда практических потребностей и исторических причин (особенно в задачах навигации) линией между точками является линия постоянного азимута ( $\alpha$ ), что отвечает траектории с постоянным курсом (локсодрома). Решение этих задач не является тривиальным и часто сводится к вычислению эллиптических интегралов и обратных им функций различными способами, нередко в условиях потери точности [1–3].

Прямая и обратная задачи в свою очередь, как фрагменты, многократно используются для решения целого круга прикладных задач. Одна из них – нахождение минимального расстояния (в рамках выбранной геометрии) между точкой и некой траекторией, а также определение точки на траектории, где реализуется это расстояние. Такая постановка встречается и в геодезии, и в навигации, когда нужно определить кратчайшее расстояние от линии движения до некоторой точки. Задача может варьироваться в зависимости от того, что представляет собой линия и каким способом измеряется расстояние. Возможны следующие четыре варианта:

- 1) траектория – ортодрома, расстояние измеряется по ортодроме;
- 2) траектория – локсодрома, расстояние измеряется по ортодроме;
- 3) траектория – ортодрома, расстояние измеряется по локсодроме;
- 4) траектория – локсодрома, расстояние измеряется по локсодроме.

Наиболее часто на практике встречается первый вариант. Здесь он и будет рассмотрен.

#### Постановка задачи

Рассматривается точка  $P_0$  с широтой  $\varphi_0$  и долготой  $\lambda_0$  и траектория (ортодрома), образуемая точкой  $P_1$  с широтой  $\varphi_1$ , долготой  $\lambda_1$  и азимутом  $\alpha$  в этой точке. Необходимо найти широту  $\varphi_2$  и долготу  $\lambda_2$  точки  $P_2$ , которая лежит на той же траектории, и в которой реализуется ближайший к точке  $P_1$  локальный минимум расстояния до точки  $P_0$  (рис. 1).

Условие нахождения *ближайшего* минимума вызвано несферичностью Земли. На сфере ортодрома является замкнутой линией, и минимум только один. Исключение составляют вырожденные варианты, когда  $P_0$  и траектория соотносятся как полюс и экватор. В случае же эллипсоида вращения ортодрома уже не будет замкнутой. Поэтому иногда можно наблюдать несколько конкурирующих между собой локальных минимумов. При этом с практической точки зрения интересным для геодезических задач и для задач навигации чаще всего является именно ближайший минимум, который нужно искать на траектории в двух направлениях от точки  $P_1$  или в одном строго заданном, в зависимости от прикладной задачи.

#### Решение задачи на сфере

Как известно, модели Земли мало отличаются от шара, поэтому естественной является попытка решить эту задачу для сферы с последующим переходом на эллипсоид вращения. Разбор задачи на сфере полезен не только с методической точки зрения, но и с точки зрения использования в дальнейшем для оптимизации расчетов.

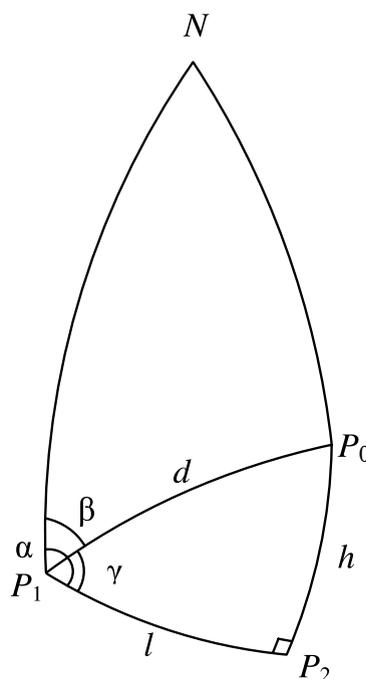


Рис. 1. Решение задачи на сфере

Кроме того, сравнивая решения на сфере и эллипсоиде, можно определить границы применимости сферического приближения. Ортодрома на сфере – это дуга большого круга, т. е. гарантированно замкнутая линия в отличие от ее аналога на эллипсоиде. Как уже отмечалось, на сфере данная задача имеет одно решение при условии, что все точки ортодромы не равноудалены от  $P_0$  (в этом случае получается бесконечное множество решений).

Наглядно такую ситуацию можно продемонстрировать, поместив точку  $P_0$  на один из полюсов, а ортодрому поместив на экваторе. Иными словами, указанная равноудаленность достигается только тогда, когда радиус-вектор точки  $P_0$ , проведенный из центра сферы, перпендикулярен плоскости дуги большого круга.

В отличие от эллипсоида вращения задача на сфере значительно проще и может быть решена аналитически средствами сферической тригонометрии. В этом случае радиус сферы традиционно принимается равным единице, и все расстояния измеряются в радианах.

Рассмотрим рис. 1, где точкой  $N$  отмечен северный полюс. Решая обратную геодезическую задачу на сфере для точек  $P_0$  и  $P_1$ , находим угол  $\beta$  и расстояние  $d$ . Так как в точке  $P_2$  достигается минимум, то угол при этой вершине треугольника  $P_0P_1P_2$  будет прямой. Угол  $\gamma$  при вершине  $P_1$  равен  $\alpha - \beta$ . Таким образом, задача сводится к решению прямоугольного сферического треугольника по гипотенузе и углу.

В контексте поставленной задачи нужно локализовать точку  $P_2$  и найти сторону  $h$ . Воспользовавшись мнемоническим правилом Непера [4, 5] для решения прямоугольных треугольников, получим формулу  $\tan(l) = \tan(d) * \cos(\gamma)$ .

Для однозначного определения положения точки  $P_2$ , будем рассматривать  $l$  не как длину, а как величину смещения вдоль ортодромы, которое может принимать значения от  $-\pi$  до  $\pi$ , где положительным смещениям соответствуют смещения из точки  $P_1$  с азимутом  $\alpha$ . Перепишем предыдущую формулу в виде:

$$\tan(l) = (\sin(d) * \cos(\gamma)) / \cos(d). \quad (1)$$

Теперь комбинация знаков числителя и знаменателя позволяет однозначно определить  $l$  (например, на языке С с помощью стандартной функции  $\text{atan2}$ ). Положение точки  $P_2$  можно найти путем решения прямой геодезической задачи (смещаясь из точки  $P_1$  на расстояние  $|l|$  с азимутом  $\alpha$ , если  $l > 0$ , и в противоположном направлении, если  $l < 0$ ).

Для нахождения расстояния  $h$  от точки  $P_0$  до ортодромы можно воспользоваться теоремой Пифагора для сферических треугольников:

$$\cos(d) = \cos(l) * \cos(h). \quad (2)$$

Теперь несложно получить минимальное расстояние  $h$ , диапазон изменения которого от 0 до  $\pi$ , что полностью согласуется с областью значений функции  $\arccos$ .

Если точка  $P_1$  перестает быть фиксированной, то при движении по ортодроме будут изменяться величины  $d$  и  $l$ . Тогда в соответствии с (2) расстояние  $d$  в зависимости от  $l$  будет определяться по формуле:

$$d(l) = \arccos(\cos(d_{\min}) * \cos(l)), \quad (3)$$

где  $d_{\min} = h$ .

Отсюда сразу же следует, что при  $d_{\min}$  не равном  $\pi / 2$ , расстояние между соседними экстремумами равно  $\pi$ , период этой функции равен  $2\pi$ , а значения функции в минимуме и максимуме  $d_{\min}$  и  $\pi - d_{\min}$  соответственно.

Введение функции  $d(l)$  целесообразно по следующей причине. При переходе от сферы к эллипсоиду предыдущие формулы (1) и (2) перестают выполняться, в то время как характер поведения функции  $d(l)$  для обеих моделей оказывается близким.

#### Основной алгоритм решения задачи на эллипсоиде

В случае эллипсоида вращения функция  $d(l)$  перестает быть периодической. В большинстве случаев она ведет себя приблизительно также, но есть примеры серьезных искажений. Это можно увидеть на представленных ниже рис. 2–5, где за модель земного эллипсоида принята WGS84 [7, 11], а за единицу длины – большая полуось.

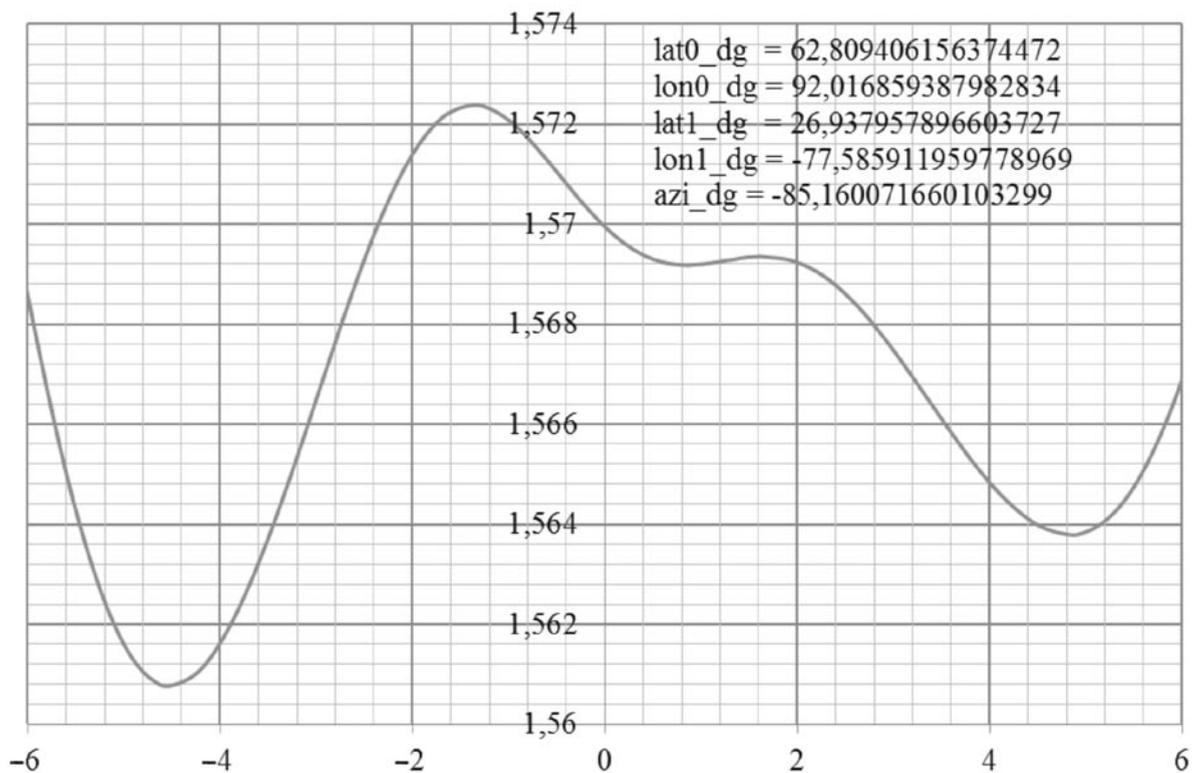


Рис. 2. Близкие экстремумы (вариант 1)

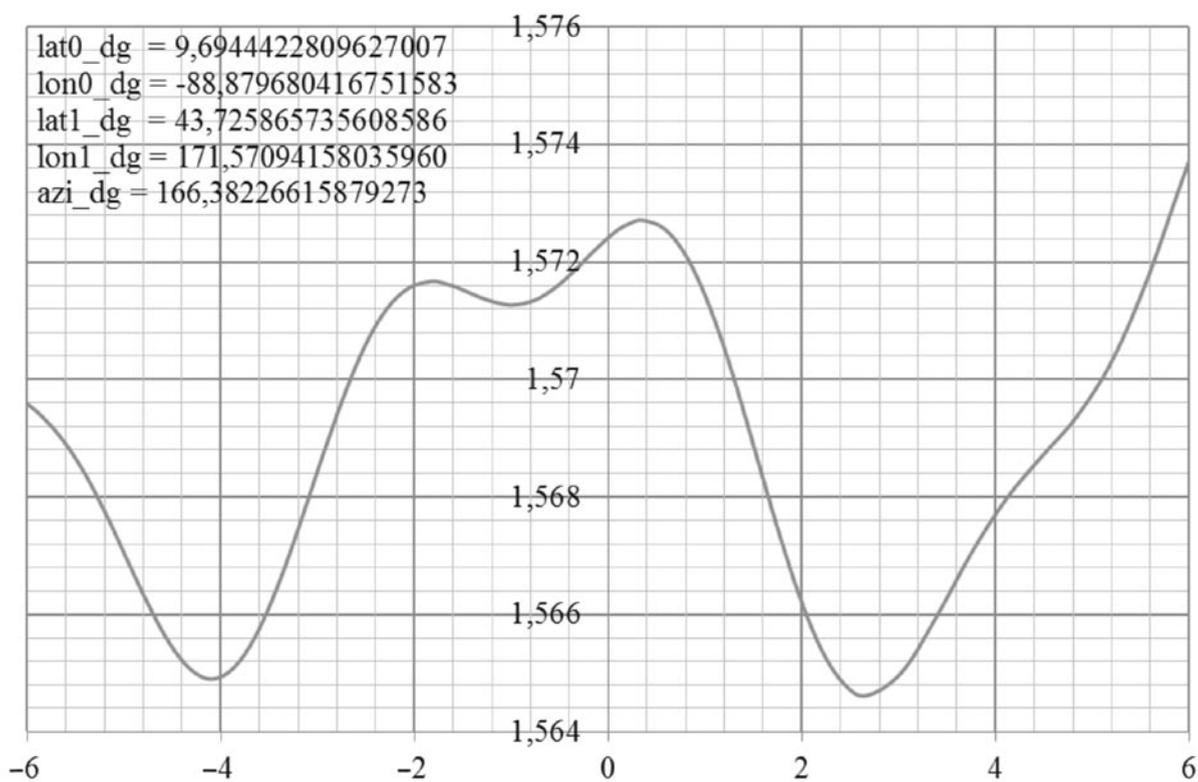


Рис. 3. Близкие экстремумы (вариант 2)

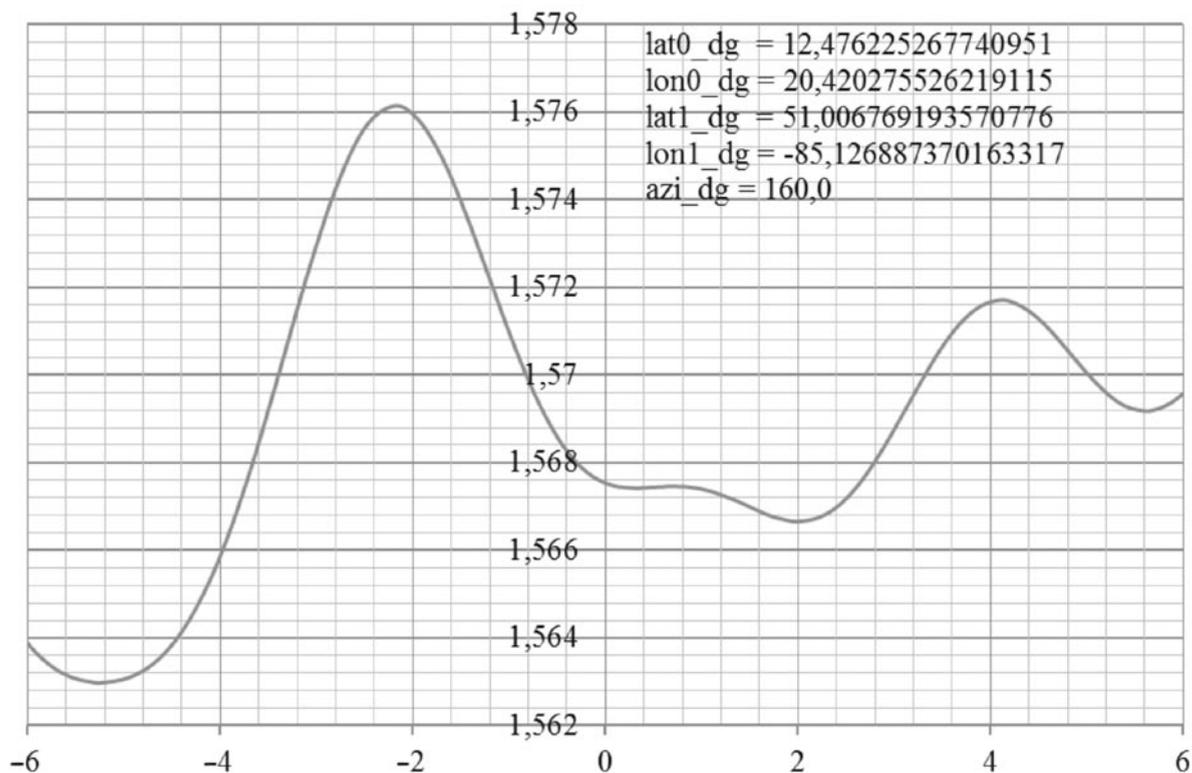


Рис. 4. Близкие экстремумы (вариант 3)

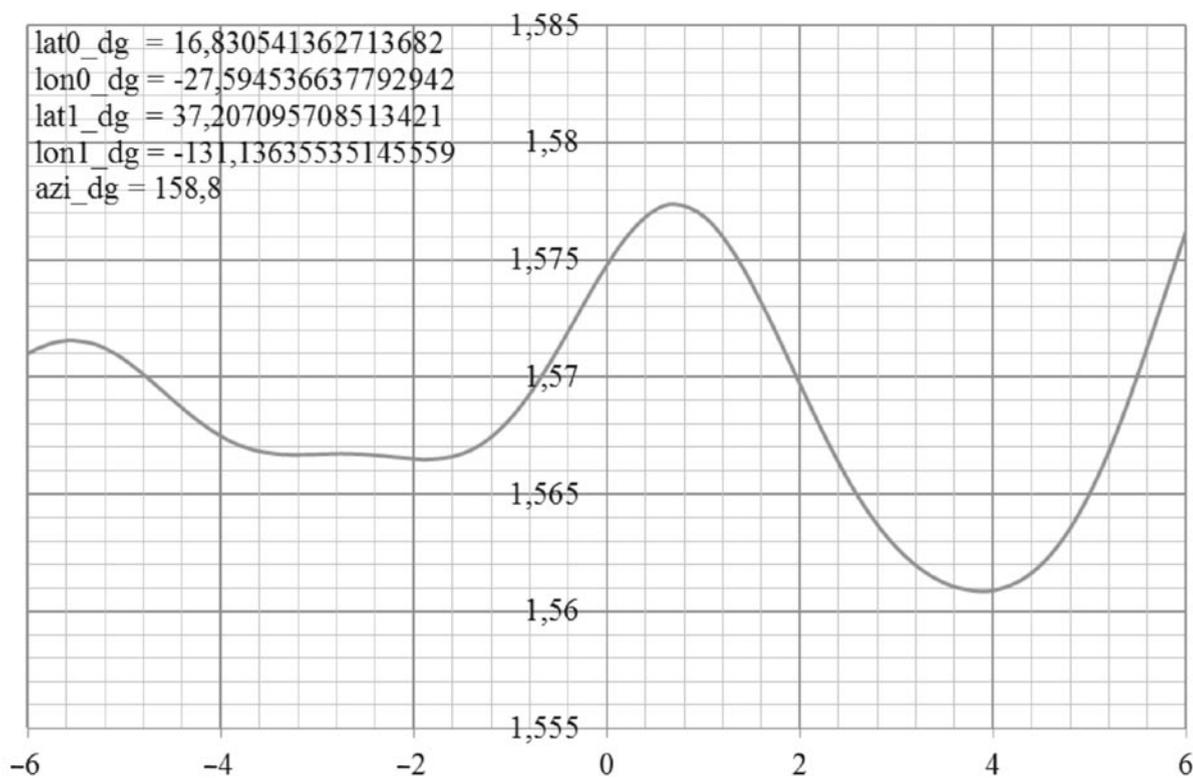


Рис. 5. Близкие экстремумы (вариант 4)

На всех рисунках приведены значения параметров, для которых строились графики:  $lat0\_dg$ ,  $lon0\_dg$ ,  $lat1\_dg$ ,  $lon1\_dg$  означают значение широты и долготы в градусах для точек  $P_0$  и  $P_1$ , а  $azi\_dg$  – значение азимута  $\alpha$  в градусах.

В ситуациях такого рода картина регулярной смены максимумов и минимумов искажается, и получаются экстремумы, близкие друг к другу, с расстоянием между ними значительно меньшим  $\pi$  (за единицу берется значение большой полуоси  $a$ ). Тогда определение ближайшей области гарантированного минимума без знания местоположения соседних экстремумов становится нетривиальной задачей.

Все подобные случаи являются аналогом ситуации на сфере, когда функция  $d(l)$  является почти постоянной, и эллиптичность формы Земли начинает играть значительную роль в появлении дополнительных экстремумов.

Эта точка зрения подтверждается данными, полученными в ходе численного эксперимента, в котором случайным образом генерировались географические координаты двух точек  $P_0$  и  $P_1$  (широты и долготы подчинялись равномерному распределению в диапазонах от  $-90$  до  $90^\circ$  и от  $-180$  до  $180^\circ$  соответственно). Для каждой такой пары азимут  $\alpha$  менялся от  $0$  до  $180^\circ$  с шагом в  $0,05^\circ$ , и на интервале смещений  $l$  от  $-2\pi$  до  $2\pi$  с шагом в  $10$  км вычислялись значения функции  $d(l)$ . При этом экстремумы определялись по нарушению монотонности этих значений, и считалось, что экстремуму отвечает точка нарушения монотонности (для которой оба соседних значения  $d(l)$  одновременно больше – минимум или меньше – максимум). Если обнаруживалось, что расстояние между соседними экстремумами было меньше трех, то осуществлялся переход на более детальный анализ.

Этот анализ заключался в том, что шаг азимута менялся на  $0,0001^\circ$ , и он изменялся в две стороны от текущего значения до тех пор, пока условие сближения экстремумов меньше чем на три не пропадало. Для каждого такого значения азимута определялся интервал близких экстремумов, т. е. диапа-

зон значений параметра  $l$ , на котором расстояние между соседними экстремумами меньше трех. Далее этот диапазон расширялся с двух сторон на величину  $3/2$ . Для всех таких обнаруженных диапазонов рассчитывалось минимальное и максимальное значение  $d(l)$  и угла  $\gamma$ .

Было сгенерировано сто тысяч пар точек, из которых только для 2717 нашелся такой диапазон азимутов, для которого соседние экстремумы сближались меньше чем на три. Выяснилось, что для всех выявленных случаев для модели Земли WGS84  $d_{\min} = 1,519$ ,  $d_{\max} = 1,622$  (т. е. разница между  $d_{\max}$  и  $d_{\min}$  составляет около 650 км), а угол варьировался от  $86,91$  до  $93,09^\circ$ . То есть расстояние и угол на всем протяжении таких интервалов мало отличаются от  $\pi/2$ , как это наблюдается на сфере при мало изменяющейся  $d(l)$ . Эти значения могут применяться для проверки на наличие двух близких экстремумов в окрестности некоторой точки ортодромы.

С учетом возможности выявлять и обрабатывать случаи близких минимумов алгоритм решения выглядит следующим образом.

**Шаг 1.** Начиная от точки  $P_1$ , вдоль рассматриваемой ортодромы (в одну или в обе стороны в зависимости от постановки задачи) откладываются отрезки длиной в  $3/2$  (расстояние до ближайшего минимума может оказаться больше  $\pi$ , по крайней мере, в некоторых случаях больше 4,35).

**Шаг 2.** Протестировать крайние точки отрезков на наличие в их окрестности близких экстремумов. Отрезок может содержать несколько близких экстремумов, если для обоих его концов одновременно выполняются условия:

$$1,519 < d(l) < 1,622 \text{ и } 86,91^\circ < \gamma < 93,09^\circ.$$

В этом случае переходим к шагу 3. Во всех остальных ситуациях непрерывная функция  $d(l)$  имеет не более одного экстремума на двух смежных отрезках. Тогда продвигаемся по ортодроме до тех пор, пока для последовательных трех точек значение  $d(l)$  в центральной из них не будет меньше, чем на краях. Переходим к шагу 4.

**Шаг 3.** Если отрезок подозревается на

наличие двух и более экстремумов (в этом случае в силу непрерывности  $d(l)$  хотя бы один из них гарантированно будет минимумом), нужно действовать исходя из требований конкретной задачи. При расстояниях между соседними точками порядка 10 000 км (это отвечает шагу  $3/2$ ) изменения функции  $d(l)$  на 650 км при решении некоторых задач могут считаться незначительными, и в качестве минимума можно взять первую попавшуюся точку из окрестности близких экстремумов.

Если же выдвигаются более строгие требования по точности, то нужно действовать исходя из них. Если минимум не обнаружен, то продолжаем движение по ортодроме с возвратом к шагу 2. В противном случае – конец работы алгоритма.

Шаг 4. Одним из универсальных методов минимизации находится минимум в пределах ближайшего к точке  $P_1$  отрезка. Если рассматриваются два направления и в обоих из них обнаруживаются равноудаленные от  $P_1$  отрезки двойной длины, содержащие минимум, то нужно решать задачу минимизации на обоих и считать в качестве ответа самый ближайший к точке  $P_1$  минимум. Конец работы алгоритма.

Стратегия поведения на шаге 3 может быть различной. Например, при повышенных требованиях к точности можно применить следующий подход:

1. При обнаружении ситуации, когда расстояние между экстремумами меньше трех, уменьшать длину откладываемых отрезков в два раза и применять к концам этих отрезков критерий для расстояния  $3/2$  (а не три, как было раньше на шаге 2).

2. Повторять деление пополам до тех пор, пока изменение функции на анализируемых интервалах не станет малым в рамках заданной точности, либо экстремумы уже не будут являться близкими в рамках текущего критерия.

3. При выявлении интервала унимодальности найти минимум, если он есть.

Представленный выше прием может быть распространен на другие задачи, если существует набор параметров, по которым можно судить о наличии ситуации с близкими минимумами.

### Использование расчетов на сфере

Описанный выше алгоритм носит общий характер и позволяет решить задачу в общей постановке. Часто объем вычислений можно сократить, используя предварительно расчеты на сфере. Они выполняются значительно быстрее, чем на эллипсоиде, т. к. в этом случае существует сравнительно простое аналитическое решение. Полученное таким образом начальное приближение может использоваться в эффективном приеме, описанном в следующем разделе. Определим условия, когда это возможно.

Одна из проблем применимости сферического подхода заключается в том, что точка минимума должна лежать на заданной ортодроме поверхности эллипсоида, в то время как сферическое решение задачи в общем случае будет вне этой линии. Дело в том, что дуга большого круга на сфере, проходящая через точку с теми же географическими координатами  $\varphi_1$  и  $\lambda_1$  и азимутом  $\alpha$  в этой точке, не будет в общем случае проходить через те же географические координаты, что и аналогичная ортодрома на эллипсоиде. Поэтому нужно каким-то образом проецировать решения, полученные на сфере, на поверхность эллипсоида. В частности, возможно использование сферы усредненного радиуса  $R = 2a/3 + b/3$  [6], где  $b$  – малая полуось, и рассмотрение на этой сфере точек с такими же значениями географических координат и азимутов, как и на эллипсоиде. После получения на сфере значения  $l$  переходим на эллипсоид и применяем это значение для нахождения положения точки  $P_2$ , решая прямую геодезическую задачу.

В табл. 1 представлены данные, отражающие зависимость максимальной ошибки по параметру  $l$  при решении задачи на эллипсоиде WGS84, используя сферическое приближение.

Исходные данные для решения задачи строились следующим образом. Широта точки  $P_1$  формировалась как равномерно распределенная случайная величина в диапазоне от  $-90$  до  $90^\circ$ , а долгота всегда была равна  $0^\circ$ . Таким образом, было учтено все многообразие положений точки  $P_1$

Таблица 1

Ошибка сферического приближения по параметрам  $l$  и  $h$

$d$ , км	$\Delta l$ , км	$\Delta h$ , км
10	0,056	0,056
20	0,11	0,11
50	0,28	0,28
100	0,56	0,56
200	1,1	1,1
500	2,8	2,8
1000	5,6	5,6
2000	11	11
5000	26	26
7000	42	33
8000	63	35
9000	130	37
9500	260	37
9900	1400	38

на поверхности эллипсоида вращения, где вариация долготы не позволяет получить большее разнообразие ситуаций. Положения точки  $P_2$  определялось путем решения прямой геодезической задачи с расстоянием  $d$  и азимутом, который формировался как равномерно распределенная случайная величина в диапазоне от  $-180$  до  $180^\circ$ . Количество испытаний составляло 30 млн для каждого значения в таблице.

Как видно из таблицы, отношение  $\Delta l / d$  не превышает 0,006 для значений  $d$  меньше 5 000 км, а далее это отношение начинает значительно расти, достигая значения 0,14 для  $d = 9\ 900$  км. Что же касается значения расстояния  $h$ , то отношение  $\Delta h / d$  не превышает значения 0,006 при всех значениях  $d$  из таблицы. Для больших значений  $d$  использование сферического приближения становится нерациональным, т. к. различие между точным и сферическим решением может быть весьма значительным. Это хорошо иллюстрируют ситуации, упоминаемые выше, с близкими или очень далекими друг от друга экстремумами.

Таким образом, по значению  $d$  можно до выполнения каких-либо расчетов оценить сверху абсолютные погрешности для величин  $l$  и  $h$ , вызванные заменой эллипсоида на сферу.

### Оптимизация с использованием специфики ортодромы

Решение задачи нахождения расстояния между прямой и точкой на плоскости еще проще, чем на сфере. Если бы существовало некое непрерывное сохраняющее углы отображение поверхности эллипсоида вращения на плоскость, при котором ортодромы переходили бы в прямые линии, то это позволило бы решить задачу путем перехода на плоскость, а потом обратно.

В картографии отображения земной поверхности на плоскость называют *проекцией* [12]. К сожалению, нельзя построить такую проекцию для всей поверхности не только эллипсоида, но и даже сферы.

Можно ослабить требования к проекции и допустить ее применимость только для части поверхности. В случае сферы примером может служить гномоническая проекция, которая переводит на плоскость только половину сферы. На эллипсоиде ситуация несколько сложнее, и аналоги сферической гномонической проекции способны лишь отображать ортодрому в «почти» прямую линию, с увеличением искажений при удалении от центра проекции. Один из самых удачных вариантов такой проекции предложен в статье [1].

Пусть точка  $A$  – центр проекции, а точка  $B$  – произвольная точка (обе находятся на поверхности земного эллипсоида). Тогда точка  $B$  проецируется в точку на плоскости с координатами  $x = \rho * \sin(\alpha_1)$ ,  $y = \rho * \cos(\alpha_1)$ ,  $\rho = m_{12} / M_{12}$ , где  $\alpha_1$  – азимут из точки  $A$  в точку  $B$ ,  $m_{12}$  – приведенная длина геодезической, а  $M_{12}$  – коэффициент сближения геодезических (geodesic scale). Заметим, что проекция не определена для неположительных значений  $M_{12}$ .

В работе [1] предложена схема алгоритма нахождения минимума расстояния от точки до ортодромы с помощью этой проекции. Метод заключается в следующем:

1. Задаем на заданной ортодроме точку  $Q_0$  – начальное приближение к точке минимума  $P_2$ . При этом  $Q_0$  не совпадает с  $P_1$ .

2. Переводим точки  $P_0$ ,  $P_1$  и  $Q_j$  на плоскость в точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $B_j$ , соответственно, выбрав в качестве центра проекции точку  $Q_j$ . При этом точки  $A_1$  и  $B_j$  окажутся на прямой, отражающей ортодрому, а точка  $A_0$  может оказаться как вне этой прямой, так и на ней.

3. Определяем точку прямой, ближайшую к  $A_0$ . Переводим на эллипсоид найденное решение и получаем точку  $Q_{j+1}$ , которая является очередным приближением к ответу.

4. Вычисляем расстояние между  $Q_j$  и  $Q_{j+1}$ . Если расстояние оказывается меньше максимально допустимого отклонения от истинного минимума, то прерываем расчет, принимая за ответ точку  $Q_{j+1}$ . Если нет, то переходим к шагу 2, используя  $Q_{j+1}$  вместо  $Q_j$ .

В статье [1] утверждается, что сходимость будет квадратичной, что свидетельствует об эффективности предложенного подхода.

К недостатку данного метода можно отнести то, что он не работает, когда одно из расстояний от  $Q_j$  до точек  $P_0$  и  $P_1$  будет порядка  $\pi / 2$  и больше. В этом случае происходит выход за границы области применимости гномонической проекции.

В добавление к сказанному выше, выбор  $Q_0$  в рамках метода неоднозначен, что влияет на результат. По этим причи-

нам следует уточнить рассмотренный алгоритм. Необходимо выделить интервал унимодальности, где гарантированно будет только один экстремум, и он является минимумом. В процессе итераций нужно следить за тем, чтобы не выйти за границы интервала. Кроме того, правильный выбор  $Q_0$  позволяет ускорить выполнение алгоритма, и этот выбор можно делать на основании сферического приближения, описанного в предыдущем разделе. Эффективность такого подхода следует из результатов табл. 2.

Эта таблица аналогична табл. 1 с точно такой же интерпретацией строк и таким же набором тестовых данных. Данные каждой клетки таблицы являются результатами усреднения нескольких испытаний.

В столбце  $A$  отражено нормированное время выполнения алгоритма нахождения минимума на эллипсоиде WGS84 методом гномонической проекции с начальным сферическим приближением.

За единицу времени в табл. 2 принято среднее время решения упомянутым методом для значения  $d = 10$  км.

В столбце  $B$  приведено время, затрачиваемое тем же методом, но с начальным приближением, соответствующим  $|l_0| = d / 2$ , где знак  $l_0$  выбирается в соответствии с направлением уменьшения расстояния до точки  $P_0$  при движении вдоль заданной в задаче ортодромы от точки  $P_1$ .

В столбце  $C$  приведено время работы популярного алгоритма минимизации Брента [8, 9]. Данные табл. 2 не только оправдывают применение начального сферического приближения для метода гномонической проекции, но и свидетельствуют о значительном выигрыше этого метода по сравнению с алгоритмом Брента.

Сформулируем окончательный вариант алгоритма:

1. По расстоянию между точками  $P_0$  и  $P_1$  определить, возможно ли использовать сферическое приближение или нет.

2. Если да, то решить задачу на сфере (это возможно сделать аналитически с помощью сферической тригонометрии).

3. Если по итогам шага 1 удается локализовать ближайший минимум, то принимая

Таблица 2

Сравнение времени решения задачи разными способами

$d$ , км	$A$	$B$	$C$
10	1	1,03	3,76
20	1,01	1,14	3,63
50	1,01	1,38	3,53
100	1,02	1,43	3,47
200	1,07	1,52	3,47
500	1,35	1,65	3,44
1000	1,51	1,67	3,32
2000	1,58	1,70	3,21
5000	1,71	2,14	3,23
7000	1,75	2,29	3,62
8000	1,77	2,35	3,55
9000	1,79	2,42	3,48
9500	1,81	2,52	3,41
9900	1,90	2,57	3,40

решение сферической задачи за нулевое приближение, применить метод проекции и завершить на этом работу. В противном случае переход к шагу 4.

4. Построить отрезки длиной в  $3/2$  и выяснить, на каких из них ожидаются минимумы. Если оба конца отрезка проходят тест на наличие близких минимумов, и нет более близкого отрезка с минимумом, где такое поведение не ожидается, то возникающая ситуация обрабатывается в зависимости от специфики конкретной задачи. Если близких минимумов нет, то переход к шагу 5.

5. Выбрать ближайший к  $P_1$  отрезок унимодальности с гарантированным минимумом (если есть конкурирующий по близости отрезок, то его также учесть). Для каждого из полученных отрезков найти минимум методом проекций и завершить алгоритм. Если метод проекций завершился неудачей (нет сходимости или выход за пределы проекции), то переход к шагу 6.

6. Применить стандартный метод ми-

нимизации. Если был один отрезок, то полученный на нем минимум считать за ответ, если два, то выбрать ближайший к точке  $P_1$ .

Предложена методика решения задачи поиска кратчайшего расстояния между точкой и геодезической линией (ортодромой). Методику можно распространить на задачи управления, связанные с перехватом целей.

Методика позволяет выявлять случаи аномально близких экстремумов. Даны рекомендации по решению задачи в таких ситуациях. Используемый подход может быть рекомендован и в более общих случаях поиска минимума в многоэкстремальных задачах.

Определена область применения метода гномонической проекции для нахождения ближайшей точки на ортодроме и предложена методика, расширяющая диапазон эффективного решения задачи.

Получена оценка точности сферического приближения для решаемой задачи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Karney C.F.F.** Algorithms for geodesics // *J. Geodesy*. 2013. Vol. 87(1). Pp. 43–55.
2. **Karney C.F.F.** Geodesics on an ellipsoid of revolution // *Technical report*. SRI International, Febr. 2011.
3. **Ботнев В.А., Устинов С.М.** Методы решения прямой и обратной геодезических задач с высокой точностью // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2014. № 3(198). С. 49–58.
4. **Todhunter I.** *Spherical trigonometry*. London: Macmillan and Co, 1886.
5. **Волынский Б.А.** *Сферическая тригонометрия*. Москва: Наука, 1977. 136 с.
6. **McCaw G.T.** Long Lines on the Earth // *Empire Survey Review*. 1932. No. 1(6). Pp. 259–263.
7. **Deakin R.E., Hunter M.N.** *Geometric Geodesy. Part A* // *Lecture Notes*. School of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, Melbourne, Australia, 2008. 140 p.
8. **Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.** *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
9. **Устинов С.М., Зимницкий В.А.** *Вычислительная математика*. СПб.: БХВ-Петербург, 2009. 336 с.
10. **Helmert F.R.** *Die mathematischen und physikalischen Theorem der höheren Geodäsie* // *Die mathematischen Theorem*. Leipzig, 1880. Vol. 1.
11. **Rapp R.H.** *Geometric geodesy. Part II* // *Technical report*. Ohio State University, 1993. 177 p.
12. **Snyder J.P.** *Map projection—a working manual* // *Professional Paper 1395*. U.S. Geological Survey, 1987. 383 p.
13. **Морозов В.П.** *Курс сфероидической геодезии*. Москва: Недра, 1979. 296 с.

### REFERENCES

1. **Karney C.F.F.** Algorithms for geodesics, *J. Geodesy*, 2013, Vol. 87(1), Pp. 43–55
2. **Karney C.F.F.** Geodesics on an ellipsoid of revolution, *Technical report*, SRI International, February 2011
3. **Botnev V.A., Ustinov S.M.** Metody resheniya pryamoy i obratnoy geodezicheskikh zadach s vysokoy tochnostyu [Methods for direct and inverse geodesic problems solving with high precision]. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye* [St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control]. St. Petersburg, 2014, No. 3(198), Pp. 49–58. (rus)
4. **Todhunter I.** *Spherical trigonometry*. London: Macmillan and Co, 1886.
5. **Volynskiy B.A.** *Sfericheskaya trigonometriya* [*Spherical trigonometry*], Moscow: Nauka Publ., 1977, 136 p. (rus)
6. **McCaw G.T.** Long Lines on the Earth. *Empire Survey Review*, 1932, No. 1(6), Pp. 259–263.
7. **Deakin R.E., Hunter M.N.** *Geometric Geodesy. Part A. Lecture Notes*. School of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, Melbourne, Australia, 2008, 140 p.
8. **Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.** *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2007, 1235 p.
9. **Ustinov S.M., Zimnitskiy V.A.** *Vychislitel'naya matematika* [*Computational mathematics*], St. Petersburg: BKhV-Petersburg Publ., 2009, 336 p. (rus)
10. **Helmert F.R.** *Die mathematischen und physikalischen Theorem der höheren Geodäsie. Die mathematischen Theorem*. Leipzig, 1880, Vol. 1.
11. **Rapp R.H.** *Geometric geodesy, Part II. Technical report*, Ohio State University, 1993, 177 p.
12. **Snyder J.P.** *Map projection – a working manual. Professional Paper 1395*, U.S., Geological Survey, 1987, 383 p.
13. **Morozov V.P.** *Kurs sferoidicheskoy geodezii* [*Course spheroidal geodesy*], Moscow: Nedra Publ., 1979, 296 p. (rus)

---

**БОТНЕВ Виктор Александрович** – старший инженер-программист ЗАО «Транзас». Россия, Санкт-Петербург, Малый пр. В.О., д. 54, корп. 4, лит. В.  
E-mail: Victor.Botnev@transas.com

**BOTNEV Victor A.** ZAO «Transas». 199178, Maly Ave. 54-4, Vasilievsky Island, St. Petersburg, Russia.  
E-mail: Victor.Botnev@transas.com

**УСТИНОВ Сергей Михайлович** – профессор кафедры информационных и управляющих систем  
Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета  
Петра Великого, доктор технических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: usm50@yandex.ru

**USTINOV Sergey M.** *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: usm50@yandex.ru