



Моделирование вычислительных, телекоммуникационных, управляющих и социально-экономических систем

DOI: 10.5862/JCSTCS.224.3

УДК 519.6

С.М. Устинов

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

S.M. Ustinov

ON THE SOLUTION OF A LINEAR LEAST SQUARES PROBLEM WITH LINEAR INEQUALITY CONSTRAINTS

Ключевой момент при решении линейной задачи наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами – это число параметров, принадлежащих границе области, которым разрешено изменение на следующем шаге метода. Показано, что выведение из активного множества двух и более параметров не гарантирует успешную работу алгоритма. Теоретические результаты проиллюстрированы вычислительным экспериментом. Двухэтапная процедура последовательного квадратичного программирования была включена в качестве подсистемы в вычислительный комплекс ПОИСК, решающий широкий круг задач статической устойчивости больших энергообъединений. Это обеспечивает сокращение объема вычислений на несколько порядков.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ; АКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО; ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ; СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ.

The key point in the solution of the linear least squares problem with linear inequality constraints is the number of parameters belonging to the border region that are allowed to change in the next step of the method. It has been shown that the removal of two or more parameters from the active set does not guarantee for the algorithm to work successfully. The theoretical results are illustrated by computational experiments. A two-stage procedure of sequential-quadratic programming was included as a subsystem in the advanced POISK software solving a wide range of problems of steady-state stability of large power pools. This ensures a reduction in the amount of computations by several orders.

LINEAR LEAST SQUARES PROBLEM WITH LINEAR INEQUALITY CONSTRAINTS; ACTIVE SET; SEQUENTIAL-QUADRATIC PROGRAMMING; STEADY-STATE STABILITY.

Решение задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями-неравенствами

$$\min_x f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

если $\mathbf{F} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x} \in R^N, \mathbf{c} \in R^N, \mathbf{b} \in R^M, \quad (1)$$

где \mathbf{H} и \mathbf{F} – матрицы размерностью $N \times N$ и $M \times N$ соответственно, уже достаточно хорошо формализовано [1] и давно доведено до относительно успешно функционирующего программного обеспечения [1–4]. Однако актуальность повышения его эффективности не ослабевает по многим причинам. С одной стороны, растет размерность ре-

шаемых задач. С другой стороны, большую популярность получил подход последовательного квадратичного программирования (SQP), когда для исходной нелинейной минимизируемой функции на каждом шаге строится соответствующая аппроксимация и решается задача (1). Как итог, задача (1) решается многократно. Подробно механизм последовательного квадратичного программирования описан в работе [1].

В формуле (1) ограничения называются *активными* (или *сдерживающими*) и образуют *активное множество*, если в соответствующих строках условий $\mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ выполняется равенство, и *неактивными* с образованием *неактивного множества*, если в этих строках имеет место строгое неравенство.

Анализ различных многочисленных алгоритмов решения задачи (1), включая доведенных до использующегося программного обеспечения [2–4], показывает, что основным их отличием является механизм перевода элементов из активного множества в неактивное до тех пор, пока это является возможным, и точка минимума не достигнута. При этом в большинстве публикуемых работ нет строгих доказательств их сходимости и оценки эффективности. Чаще ограничиваются сравнением алгоритмов друг с другом на какой-то традиционной коллекции тестовых примеров. Поэтому большой интерес вызывает линейная задача наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами (NNLS), являющаяся частным случаем задачи (1), и для которой в [4] дан не только детальный алгоритм решения, но и строгое доказательство его сходимости.

Многочисленные приложения метода наименьших квадратов можно найти в теории управления, математическом программировании, математике, физике, статистике, экономике и пр.

Авторы метода, реализованного в алгоритме GPCG [2], в отличие от многих других предлагают эвристическую процедуру выведения из активного множества на каждом шаге одновременно многих параметров. Если бы это оказалось обоснованным, хотя бы для задачи (2), эффективность процедуры поиска минимума была бы заметно повышена.

Одной из целей настоящей работы является уточнение того количества элементов, которое на одном шаге алгоритма может быть обоснованно переведено из активного множества в неактивное.

Линейная задача наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами

Здесь минимизация среднеквадратичного критерия дополняется условием неотрицательности параметров минимизируемой функции

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in R^N, \quad \mathbf{f} \in R^M,$$

где матрица \mathbf{E} имеет размерность $M \times N$, а квадрат нормы вектора — его скалярное произведение. Предполагается, что $M > N$. Введем индексные множества \mathcal{P} и \mathcal{L} с элементами целого типа, принимающими значения от 1 до N . Компоненты вектора \mathbf{x} , индексированные множеством \mathcal{L} , имеют значение нуль и принадлежат активному множеству, а переменные, индексированные множеством \mathcal{P} , могут принимать ненулевые значения и принадлежат неактивному множеству.

В работе [4] алгоритм решения задачи (2) детализируется следующим образом.

Шаг 1. Положить $\mathcal{P} := \emptyset$, $\mathcal{L} := \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathbf{x} := \mathbf{0}$.

Шаг 2. Вычислить вектор $\mathbf{w} := \mathbf{E}^T(\mathbf{f} - \mathbf{E}\mathbf{x})$.

Шаг 3. Если множество \mathcal{L} пусто или $w_j \leq 0$ для всех $j \in \mathcal{L}$, перейти к шагу 12.

Шаг 4. Найти такой индекс t из множества \mathcal{L} , что $w_t = \max\{w_j : j \in \mathcal{L}\}$.

Шаг 5. Переместить индекс t из множества \mathcal{L} во множество \mathcal{P} .

Шаг 6. Пусть j -й столбец матрицы \mathbf{E}_p равен j -му столбцу матрицы \mathbf{E} , если $j \in \mathcal{P}$, и нулевому столбцу, если $j \in \mathcal{L}$. Вычислить вектор \mathbf{z} как решение задачи наименьших квадратов $\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{z} \cong \mathbf{f}$. Эта задача определяет только компоненты \mathbf{z} для $j \in \mathcal{P}$. Остальные компоненты полагаются нулевыми.

Шаг 7. Если все ненулевые компоненты \mathbf{z} положительны, то задать $\mathbf{x} := \mathbf{z}$ и перейти к шагу 2.

Шаг 8. Среди всех $j \in \mathcal{P}$, для которых

компоненты вектора \mathbf{z} не положительны, найти индекс $q \in \mathcal{P}$, такой что

$$\frac{x_q}{x_q - z_q} = \min \left\{ \frac{x_j}{x_j - z_j} \right\}.$$

Шаг 9. Положить $\alpha = \frac{x_q}{x_q - z_q}$.

Шаг 10. Положить $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{z} - \mathbf{x})$.

Шаг 11. Переместить из множества \mathcal{P} в множество \mathcal{L} все индексы $j \in \mathcal{P}$, для которых $x_j = 0$. Перейти к шагу 6.

Шаг 12. Конец работы алгоритма.

Полученный таким образом вектор \mathbf{x} и двойственный вектор \mathbf{w} удовлетворяют условиям известной теоремы Куна–Таккера, гарантирующим тот факт, что полученный вектор \mathbf{x} является решением задачи (2).

Для доказательства сходимости алгоритма ключевыми являются шаги 4–6, на которых индекс t определяет номер компоненты, еще не представленной во множестве \mathcal{P} , которая обязательно будет *положительной*, если ввести ее в решение. Существенный момент – это одновременный ввод только *одной* компоненты. На то, что именно для одной вводимой в \mathcal{P} компоненты можно обеспечить сходимость алгоритма, указывает следующая доказанная в [4] теорема.

Теорема 1. Пусть матрица \mathbf{A} ранга N имеет размерность $M \times N$, ω – скалярная величина, \mathbf{b} – вектор размерности M , для которого выполняется условие

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega > 0, \quad (3)$$

то есть $N-1$ компонента вектора в правой части (3) равна нулю.

Пусть также \mathbf{x} – решение задачи наименьших квадратов

$$(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \rightarrow \min.$$

Тогда последняя компонента вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ положительная ($\tilde{x}_N > 0$).

Доказательство. Пусть \mathbf{Q} – ортогональная матрица размерности $M \times M$, аннулирующая поддиагональные элементы в первых $N-1$ столбцах \mathbf{A} , то есть

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} \in R^{N-1}, \quad \mathbf{t} \in R^{M-N+1}, \quad (4)$$

где \mathbf{s} и \mathbf{t} – векторы соответствующей размерности, а \mathbf{R} – верхняя треугольная матрица размерности $(N-1) \times (N-1)$. Она не вырождена, так как \mathbf{A} имеет полный столбцовый ранг, равный N . Матрица \mathbf{Q} вычисляется аналогично тому, как это делается при построении QR-разложения, например, используя преобразования Хаусхолдера или Гивенса [5, 6].

Введем также векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{u} \in R^{N-1}, \quad \mathbf{v} \in R^{M-N+1}. \quad (5)$$

Учитывая (4), получаем

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T & \mathbf{t}^T \end{pmatrix},$$

и с учетом (5) формула (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Q}^T)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T & \mathbf{t}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{u} + \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, а $\mathbf{t}^T \cdot \mathbf{v} = \omega > 0$.

Теперь обратимся к задаче наименьших квадратов. Разделим вектор \mathbf{x} на подвекторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^* \in R^{N-1}$$

и будем минимизировать квадрат длины вектора невязки с учетом $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}), \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}x_N \\ \mathbf{t}x_N - \mathbf{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}x_N \\ \mathbf{t}x_N - \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Условие $(\mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}x_N, \mathbf{R}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}x_N) \rightarrow \min$ определяет вектор $\mathbf{x}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}x_N$, а условие $(\mathbf{t}x_N - \mathbf{v}, \mathbf{t}x_N - \mathbf{v}) \rightarrow \min$ гарантирует положительность x_N

$$x_N = \frac{\mathbf{t}^T \mathbf{v}}{\mathbf{t}^T \mathbf{t}} = \frac{\omega}{\mathbf{t}^T \mathbf{t}} > 0,$$

что и доказывает теорему.

Сходимость алгоритма в таком случае очевидна, т. к. каждый шаг алгоритма со-

кращает число индексов во множестве \mathcal{P} , и число шагов является конечным.

Как уже отмечалось, при решении общей задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями-неравенствами (1) практическая успешность многих программных продуктов не сопровождается строгими доказательствами сходимости алгоритмов и оценкой эффективности. При этом, если алгоритмы BVLS [4], QPROG [3] и включенный в состав MatLab алгоритм QR [1], аналогично изложенному методу решения задачи (2), на каждом шаге выводят из активного множества только одну переменную, то в алгоритме GPCG [2] реализована эвристическая процедура выведения одновременно многих параметров. Если бы это оказалось обоснованным, хотя бы для задачи (2), эффективность процедуры поиска минимума была бы заметно повышена. К сожалению, в общем случае это не так [7]. Уже для двух параметров положительный эффект не гарантирован. Это непосредственно следует из предлагаемой теоремы 2.

Теорема 2. Пусть матрица A ранга N имеет размерность $M \times N$, ω_1 и ω_2 – скалярные величины, \mathbf{b} – вектор размерности M , для которого выполняется условие

$$A^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_1, \omega_2 > 0, \quad (7)$$

то есть $N-2$ компонента вектора в правой части (7) равна нулю.

Пусть также \mathbf{x} – решение задачи наименьших квадратов

$$(A\mathbf{x} - \mathbf{b}, A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \rightarrow \min.$$

Тогда последние две компоненты вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ (\tilde{x}_{N-1} и \tilde{x}_N) не обязаны быть одновременно положительными.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 1, пусть Q – ортогональная матрица размерности $M \times M$, аннулирующая поддиагональные элементы в первых $N-2$ столбцах A , то есть

$$Q \cdot A = \begin{pmatrix} R & \mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где \mathbf{s} и \mathbf{t} – на этот раз матрицы размерности $(N-2) \times 2$ и $(M-N+2) \times 2$ соответственно, а R – верхняя треугольная матрица размерности $(N-2) \times (N-2)$. Она не вырождена, т. к. A имеет полный столбцовый ранг, равный N .

Введем также векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = Q \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{u} \in R^{N-2}, \quad \mathbf{v} \in R^{M-N+2}. \quad (9)$$

Учитывая (8), получаем:

$$(Q \cdot A)^T = A^T Q^T = \begin{pmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T & \mathbf{t}^T \end{pmatrix}$$

и с учетом (9) формула (7) преобразуется к виду:

$$A^T \mathbf{b} = (A^T Q^T)(Q\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^T & \mathbf{t}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T \mathbf{u} \\ \mathbf{s}^T \mathbf{u} + \mathbf{t}^T \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, а $\mathbf{t}^T \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$. При этом

$$\omega_1, \omega_2 > 0.$$

Теперь обратимся к задаче наименьших квадратов. Разделим вектор \mathbf{x} на подвекторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^* \in R^{N-2}$$

и будем минимизировать квадрат длины вектора невязки с учетом $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$(A\mathbf{x} - \mathbf{b}, A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = (Q(A\mathbf{x} - \mathbf{b}), Q(A\mathbf{x} - \mathbf{b})) = \left(\begin{pmatrix} R\mathbf{x}^* + \mathbf{s} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \\ \mathbf{t} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - \mathbf{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R\mathbf{x}^* + \mathbf{s} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \\ \mathbf{t} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - \mathbf{v} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \min.$$

Требование

$$\left(R\mathbf{x}^* + \mathbf{s} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, R\mathbf{x}^* + \mathbf{s} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \right) \rightarrow \min$$

определяет вектор $\mathbf{x}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}$, а из условия

$$\left(\mathbf{t} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - \mathbf{v}, \mathbf{t} \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - \mathbf{v} \right) \rightarrow \min$$

следует выражение для оптимального значения вектора $\begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = (\mathbf{t}^T \mathbf{t})^{-1} \mathbf{t}^T \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{t}^T \mathbf{t})^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Элементы симметрической матрицы $(\mathbf{t}^T \mathbf{t})^{-1}$ размерностью 2×2

$$(\mathbf{t}^T \mathbf{t})^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

могут принимать относительно произвольные значения, и, например, при отрицательных значениях элемента c , даже условие $\omega_1, \omega_2 > 0$ не гарантирует одновременной положительности компонент вектора $\begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}$, что и доказывает теорему.

Таким образом, процедура вывода из активного множества более одной переменной на шаге (в частности в алгоритме GPCG [2]) сохраняет эвристический характер и не гарантирует выигрыша по сравнению с алгоритмом, изложенным в [4]. Это показывают и вычислительные эксперименты следующего параграфа при решении реальных прикладных задач.

Процедура последовательного квадратичного программирования в задаче обеспечения устойчивости режимов больших энергообъединений

Иллюстрация сделанных выводов была выполнена при решении важной прикладной задачи численного поиска значений параметров систем регулирования, обеспечивающих требуемые демпферные свойства больших энергообъединений для заданной совокупности ее режимов. Для решения широкого круга задач в области статической устойчивости в СПбПУ был разработан вычислительный комплекс ПОИСК, получивший широкое признание у нас в стране и за рубежом и нашедший свое применение

во многих научно-исследовательских и проектных организациях России, Австралии, Китая. Первые алгоритмы, положенные в его основу, были предложены около тридцати лет назад [8–11] и получили свое развитие в более поздних работах [12–15]. Одна из подсистем комплекса реализовала формализованный численный поиск единой настройки регуляторов для совокупности режимов ЭЭС. С этой целью в линеаризованной модели

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{k})\mathbf{x}, \quad (12)$$

где \mathbf{k} – вектор параметров системы управления и \mathbf{A} – матрица состояния системы, необходимо было обеспечить смещение влево на комплексной плоскости группы собственных значений λ_i матрицы \mathbf{A} . Уже в первых версиях ПОИСКА описанная процедура имела формализованный характер и позволяла полностью автоматизировать процесс выбора параметров управления. Однако каждое вычисление специальной минимизируемой функции качества было связано с решением полной проблемы собственных значений для матрицы состояния системы (12) на основе QR-алгоритма. Учитывая рост трудоемкости последнего в кубической зависимости от размерности матрицы [5, 16], для моделей больших энергосистем объем вычислений непреодолимо возрастает. Устранить эти недостатки и значительно сократить объем вычислений позволяет следующий подход, базирующийся на двухэтапном методе последовательного квадратичного программирования.

Введем следующие обозначения. Пусть \mathbf{k}_0 – начальное значение вектора варьируемых параметров, $\Delta \mathbf{k}$ – вектор их приращений, α_i – вещественные части собственных значений, взятые с обратным знаком ($\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$), \mathbf{a} – вектор, содержащий α_i интересующей группы собственных значений, смещение которых в комплексной плоскости будет контролироваться, $\Delta \mathbf{a}$ – вектор желаемых их приращений.

Введем также матрицу чувствительности \mathbf{H} с элементами $h_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial k_j}$, получающимися по хорошо известным формулам:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_j} = \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k_j} \mathbf{u}_i / (\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i),$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial k_j} = -\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_j} \right).$$
(13)

Здесь \mathbf{A} — матрица системы, $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$ — ее собственные значения, $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ — собственные векторы матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^T соответственно.

Первый этап алгоритма требует решать на каждом шаге следующую задачу квадратичного программирования:

$$\|\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{k} - \mathbf{p} - \Delta \alpha\| \rightarrow \min$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \Delta \mathbf{k}_{\min} \leq \Delta \mathbf{k} \leq \Delta \mathbf{k}_{\max}.$$
(14)

Ограничения на $\Delta \mathbf{k}$ диктуются, в первую очередь, областью корректности квадратичной модели. Кроме того, имеются и естественные технологические ограничения на диапазон изменения параметров. Введение вспомогательного вектора \mathbf{p} разрешает неограниченное изменение влево контролируемой группы собственных значений, входящих в вектор α .

В ряде случаев задача (14) может иметь не одно решение. При этом максимальный интерес вызывает то, которое имеет наименьшую длину $\|\Delta \mathbf{k}\|$, что повышает точность используемой аппроксимации. Поэтому после получения решения (14), обозначаемого как $\Delta \mathbf{k}^*$, предлагается обратиться к еще одной задаче квадратичного программирования

$$\|\Delta \mathbf{k}\| \rightarrow \min, \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{k} \geq \Delta \alpha^*,$$

$$\Delta \mathbf{k}_{\min} \leq \Delta \mathbf{k} \leq \Delta \mathbf{k}_{\max},$$
(15)

и процедура выполнения одного шага алгоритма становится двухэтапной. На втором этапе минимизируется величина $\|\Delta \mathbf{k}\|$ при условии, что $\mathbf{H} \Delta \mathbf{k}$ принимает значения не меньше $\Delta \alpha^* = \mathbf{H} \Delta \mathbf{k}^*$, где $\Delta \alpha^*$ — смещение доминирующей совокупности собственных значений, достигнутое на первом этапе при решении (14). Эта двухэтапная процедура легко распространяется и на случай выбора единой настройки регуляторов для совокупности режимов работы энергосистемы.

Следует отметить, что размерность вектора $\Delta \alpha^*$ невелика. Она заметно меньше раз-

мерности вектора переменных состояния \mathbf{x} системы (12). Решение задач (14) и (15) составляет один шаг метода последовательного квадратичного программирования. Начальные значения \mathbf{k}_{\min} и \mathbf{k}_{\max} могут оказаться относительно малыми или слишком большими. В первом случае на следующем шаге эти величины могут быть увеличены, а во втором — уменьшены. Итоговая трудоемкость всей процедуры определяется общим числом шагов, необходимых для выполнения заданных требований по демпфированию.

Предложенный алгоритм был включен в вычислительный комплекс ПОИСК. Целью исследований в настоящем разделе являлась сравнительная оценка эффективности методов решения задачи квадратичного программирования (14). Вычислительные эксперименты [7] проводились для четырех уже упомянутых широко известных алгоритмов: BVLS [4], QPROG [3], включенный в состав MatLab алгоритм QP [1] и GPCG [2]. Первые три из них реализуют «осторожную стратегию» и на каждом шаге выводят из активного множества только одну переменную. Доводами в их пользу является гарантированная теоремой 1 сходимостью линейной задачи наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами. В последнем же алгоритме GPCG реализована эвристическая процедура выведения одновременно многих параметров. На то, что она может оказаться неэффективной в ряде случаев, указывают результаты теоремы 2.

Исследования проводились на двух модельных примерах. В первом случае это была тестовая схема, предложенная институтом Энергосетьпроект [17], включающая линию напряжения 1150 кВ протяженностью 2400 км. Она содержит 12 эквивалентных генераторов, 8 из которых оснащены автоматическими регуляторами возбуждения сильного действия. Число узлов схемы — 63, число нагрузок — 35. Количество дифференциальных уравнений модели варьируется от 46 до 150 в зависимости от подробности моделирования. Анализировались пять режимов работы схемы. Количество параметров (вектор $\Delta \mathbf{k}$ в задаче (14)) достигало 32, а размерность вектора \mathbf{p} , отражаю-

щего контролируемую группу собственных значений, варьировалась в диапазоне от 18 до 49. Соответствующую размерность имела и матрица \mathbf{H} (от 18×32 до 49×32).

Во втором случае это была стандартная тестовая схема New England [18] общества IEEE, широко используемая при решении системных задач в области устойчивости и управления. Число генераторов – 10, из которых 9 моделируются подробно с учетом демпферных контуров. Число узлов – 39, число нагрузок – 18. Дифференциальный порядок в зависимости от подробности моделирования составляет от 87 до 160. Помимо «базового» режима работы здесь рассматривались еще три дополнительных режима, очень тяжелые по устойчивости и неустойчивые при отсутствии системных стабилизаторов. Здесь число компонент вектора $\Delta \mathbf{k}$ в задаче (14) достигало 32, а размерность вектора \mathbf{p} варьировалась в диапазоне от 18 до 36. Размерность матрицы \mathbf{H} изменялась в пределах от 18×32 до 36×32 .

Все режимы обеих схем уже многократно исследовались и оптимальные настройки для различных вариантов ранее уже были найдены. Предлагаемая процедура для всех четырех различных алгоритмов (GPCG, BVLS, QPROG, QP) решения задачи (14) позволила достичь необходимой точности и получить оптимальные значения параметров АРВ. Временные характеристики также показали их *соизмеримую эффективность* и невозможность однозначно предпочесть какой-либо из них. Таким образом, никакой выгоды от выведения одновременно многих параметров из активного множества в алгоритме GPCG не наблюдалось.

В дополнение следует отметить, что трудоемкость двухэтапной процедуры (14), (15) для любого из рассмотренных четырех алгоритмов оказалась меньше в несколько сотен раз в зависимости от варианта решения задачи по сравнению с методом предыдущей версии ПОИСКА, требующим на каждом шаге вычисления всех собственных значений QR-алгоритмом. Такой большой выигрыш продиктован следующими факторами. Трудоемкость одного шага процедуры последовательного квадратичного про-

граммирования в основном определяется объемом вычислений для построения матрицы \mathbf{H} , что требует однократного решения полной проблемы собственных значений QR-алгоритмом для матрицы порядка 160×160 . Число таких шагов невелико и в рассматриваемых тестах не превышало 10. В то же время предыдущий алгоритм требовал многие сотни, а иногда и тысячи шагов, каждый из которых требовал пересчета всех собственных значений.

Следует отметить, что порядок дифференциальных уравнений в тестовых схемах не является пределом для предложенного метода. Для моделей энергосистем с несколькими тысячами дифференциальных уравнений его эффективность по сравнению с ранее использовавшимися алгоритмами ожидается еще выше. Это позволит значительно расширить возможности вычислительного комплекса ПОИСК, увеличить размеры исследуемых энергообъединений и не только решать задачи эффективного выбора настроек регуляторов, но и на новом уровне обращаться к таким разнообразным проблемам, как

- анализ свойств протяженных энергообъединений [19–25] (возникновение в них низкочастотных колебаний, оценка роли управляемых шунтирующих реакторов и др.);
- ранжирование нагрузок по их влиянию на статическую устойчивость [26, 27];
- обоснованное упрощение моделей [28, 29] и синтез новых законов управления [30, 31];
- учет неопределенности параметров энергосистемы, оценка чувствительности запасов по устойчивости к вариации режимов работы, решение ряда проблем адаптации при управлении статической устойчивостью больших энергообъединений [32, 33] и пр.

Для линейной задачи наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами доказана теорема о том, что выведение из активного множества двух и более параметров не гарантирует успешную работу алгоритма. Разработанная двухэтапная процедура последовательного квадратичного программирования включена в качестве подси-

стемы в вычислительный комплекс ПОИСК, решающий широкий круг задач статической устойчивости больших энергообъединений. Это позволило обеспечить автоматический

и диалоговый режим оптимизации значений параметров управления и сократить объем вычислений в сотни раз по сравнению с предыдущей версией комплекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
2. More J.J., Toraldo G. Algorithm for bound constrained quadratic programming problems // Numer. Math. 1989. Vol. 43. No. 3. Pp. 377–400.
3. Goldfarb D., Idnani A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs // Math. Programming. 1983. Vol. 27. Pp. 1–33.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов. Пер. с англ. М.: Наука, 1986. 232 с.
5. Устинов С.М., Зимницкий В.А. Вычислительная математика. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 336 с.
6. Зимницкий В.А., Устинов С.М. Методы анализа математических моделей динамических систем. Л.: ЛГТУ, 1991. 81 с.
7. Лившиц Д.Е., Устинов С.М. Методика выбора оптимальных значений параметров систем управления устойчивостью режимов больших энергообъединений // Труды СПбГТУ Вычислительные, измерительные и управляющие системы. СПб., 2001. № 482. С. 17–21.
8. Груздев И.А., Труспекова Г.Х., Устинов С.М. Численный поиск настроек регуляторов возбуждения // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1984. № 4. С. 18–24.
9. Груздев И.А., Труспекова Г.Х., Устинов С.М. Одновременная координация настроек регуляторов возбуждения генераторов на базе численного поиска // Электричество. 1984. № 3. С. 51–53.
10. Груздев И.А., Торопцев Е.Л., Устинов С.М. Определение настроек АРВ для совокупности режимов энергосистем // Электричество. 1986. № 4. С. 11–15.
11. Груздев И.А., Устинов С.М., Шевяков В.В. Анализ и управление собственными динамическими свойствами электроэнергетических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1988. № 6. С. 28–36.
12. Масленников В.А., Устинов С.М., Шелухин Н.Н. Метод параметрической оптимизации для обеспечения колебательной статической устойчивости сложных энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 1994. № 1. С. 38–46.
13. Maslennikov V.A., Ustinov S.M. The Optimization Method for Coordinated Tuning of Power System Regulators // Proc. 12th Power System Computation Conf. Dresden. 1996. Vol. 1. Pp. 70–75.
14. Maslennikov V.A., Ustinov S.M. Software «POISK» – Advanced Information Technology for Power Systems Stability Control // Proceedings of Internat. Conf. on Informatics and Control. St. Petersburg, 1997. Vol. 2. Pp. 696–703.
15. Maslennikov V.A., Ustinov S.M. Method and Software for Coordinated Tuning of Power System Regulators // IEEE Transactions on Power Systems. 1997. Vol. 12. No. 4. Pp. 1419–1424.
16. Груздев И.А., Торопцев Е.Л., Устинов С.М. Исследование эффективности расчета корней характеристических уравнений высоких порядков при решении задач устойчивости // Известия высших учебных заведений. Энергетика. 1986. № 4. С. 7–10.
17. Азарьева Е.Д., Хвошинская З.Г., Груздев И.А., Масленников В.А., Устинов С.М. Тестовая схема для расчетов статической устойчивости энергосистем // Методы и программное обеспечение для расчетов колебательной устойчивости энергосистем (ФЭО). Л.: 1991. С. 88–105.
18. Byerly R.T., Sherman D.E., Vennon R.J. Frequency Domain Analysis of Low-Frequency Oscillations in Large Electric Power Systems // EPRI EL-726, RP744-1 Interim Report, Palo Alto, California, 1978.
19. Груздев И.А., Стародубцев А.А., Устинов С.М., Шевяков В.В. Анализ статической устойчивости и демпфирования низкочастотных колебаний в объединенных энергосистемах // Электричество. 1991. № 3. С. 1–5.
20. Груздев И.А., Масленников В.А., Устинов С.М. Исследование собственных динамических свойств протяженных электроэнергетических объединений // Изв. РАН. Энергетика. 1993. № 1. С. 102–114.
21. Устинов С.М., Масленников В.А. Анализ общесистемных низкочастотных колебаний в больших энергообъединениях // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 2. С. 91–107.
22. Масленников В.А., Устинов С.М. Низкочастотные системные колебания и устойчивость объединенных энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 2001. № 4. С. 69–81.
23. Ustinov S.M., Milanović J.V., Maslennikov V.A. Inherent dynamic properties of interconnected power systems // Int. J. Elect. Power & Energy Syst.

2002. Vol. 22. Pp. 371–378.

24. **Масленников В.А., Устинов С.М.** Статическая устойчивость протяженных электропередач с управляемыми шунтирующими реакторами // Изв. РАН. Энергетика. 1995. № 1. С. 58–65.

25. **Масленников В.А., Устинов С.М.** Динамические свойства и статическая устойчивость дальних электропередач с управляемыми шунтирующими реакторами // Изв. РАН. Энергетика. 1999. №3. С. 68–78.

26. **Масленников В.А., Устинов С.М.** Методика ранжирования нагрузок по их влиянию на статическую устойчивость энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 6. С. 63–73.

27. **Maslennikov V.A., Milanović J.V., Ustinov S.M.** Robust Ranking of Loads by Using Sensitivity Factors and Limited Number of Points From a Hyperspace of Uncertain Parameters // IEEE Trans. on Power Systems. 2002. Vol. 17. No. 3. Pp. 565–570.

28. **Груздев И.А., Устинов С.М.** Методика эквивалентирования при поиске оптимальных настроек регуляторов возбуждения // Изв. АН СССР. Энер-

гетика и транспорт. 1987. № 1. С. 38–43.

29. **Устинов С.М.** Метод упрощения математических моделей для управления демпферными свойствами электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. 1992. № 2. С. 44–54.

30. **Устинов С.М., Масленников В.А.** Метод аппроксимации модального управления демпферными свойствами энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 1. С. 121–132.

31. **Устинов С.М., Масленников В.А.** Аппроксимация модального управления в задачах статической устойчивости энергосистем // Изв. РАН. Энергетика. 2006. № 5. С. 91–97.

32. **Устинов С.М., Масленников В.А.** Проблемы адаптации при управлении статической устойчивостью больших энергообъединений // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 5. С. 7–16.

33. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M., Milanović J.V.** Method for considering uncertainties for robust tuning of PSS and evaluation of stability limits // IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib. 2002. Vol. 149. No. 3. Pp. 295–299.

REFERENCES

1. **Gill F., Myurey U., Rayt M.** *Prakticheskaya optimizatsiya [Practical optimization]*. Moscow: Mir Publ., 1985, 509 p. (rus)

2. **More J.J., Toraldo G.** Algorithm for bound constrained quadratic programming problems. *Numer.Math*, 1989, Vol. 43, No. 3, Pp. 377–400.

3. **Goldfarb D., Idnani A.** A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Math. Programming*, 1983, Vol. 27, Pp. 1–33.

4. **Louson Ch., Khenson R.** *Chislennoye resheniye zadach metodom naimenshikh kvadratov [Solving Least Squares Problems]*. Moscow: Nauka Publ., 1986, 232 p. (rus)

5. **Ustinov S.M., Zimnitskiy V.A.** *Vychislitel'naya matematika [Computational Mathematics]*. St. Petersburg: BKhV-Petersburg Publ., 2008, 336 p. (rus)

6. **Zimnitskiy V.A., Ustinov S.M.** *Metody analiza matematicheskikh modeley dinamicheskikh system [Methods for the analysis of mathematical models of dynamic systems]*. Leningrad: LGTU Publ., 1991, 81 p. (rus)

7. **Livshits D.Ye., Ustinov S.M.** Методика выбора оптимальных значений параметров систем управления устойчивостью режимов больших энергообъединений [Method of selection of optimal parameters of control systems of large power systems stability modes]. *Trudy SPbGTU. Vychislitel'nyye, izmeritel'nyye i upravlyayushchiye sistemy [Computers,*

measuring and control systems]. St. Petersburg, 2001, No. 482, Pp. 17–21. (rus)

8. **Gruzdev I.A., Truspekova G.Kh., Ustinov S.M.** Chislennyy poisk nastroyek regulyatorov возбуждения [Numerical search settings excitation controllers]. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport [Energetics and transport]*, 1984, No. 4, Pp. 18–24. (rus)

9. **Gruzdev I.A., Truspekova G.Kh., Ustinov S.M.** Odnovremennaya koordinatsiya nastroyek regulyatorov возбуждения generatorov na baze chislennogo poiska [Simultaneous coordination controller settings generator excitation based on the numerical search]. *Elektrichestvo [Electricity]*, 1984, No. 3, Pp. 51–53. (rus)

10. **Gruzdev I.A., Toroptsev Ye.L., Ustinov S.M.** Opredeleniye nastroyek ARV dlya sovokupnosti rezhimov energosistem [Defining settings for aggregate ARV regimes of power systems]. *Elektrichestvo [Electricity]*, 1986, No. 4, Pp. 11–15. (rus)

11. **Gruzdev I.A., Ustinov S.M., Shevyakov V.V.** Analiz i upravleniye sobstvennymi dinamicheskimi svoystvami elektroenergeticheskikh system [Analysis and management of own dynamic properties of electric power systems]. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport [Energetics and transport]*, 1988, No. 6, Pp. 28–36. (rus)

12. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M., Shelukhin N.N.** Metod parametricheskoy optimizatsii

dlya obespecheniya kolebatelnoy staticheskoy ustoychivosti slozhnykh energosistem [A method of parametric optimization for vibrational static stability of complex power systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1994, No. 1, Pp. 38–46. (rus)

13. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** The Optimization Method for Coordinated Tuning of Power System Regulators. *Proc. 12th Power System Computation Conference*. Dresden, 1996, Vol. 1, Pp. 70–75.

14. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Software “POISK” – Advanced Information Technology for Power Systems Stability Control. *Proceedings of International Conference on Informatics and Control*. St. Petersburg, 1997, Vol. 2, Pp. 696–703.

15. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Method and Software for Coordinated Tuning of Power System Regulators. *IEEE Transactions on Power Systems*, 1997, Vol. 12, No. 4, Pp. 1419–1424.

16. **Gruzdev I.A., Toroptsev Ye.L., Ustinov S.M.** Issledovaniye effektivnosti rascheta korney kharakteristicheskikh uravneniy vysokikh poryadkov pri reshenii zadach ustoychivosti [Research of efficiency calculation of the roots of the characteristic equation of high order to solve problems of stability]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Energetika [Proceedings of the higher educational institutions. Energetics]*, 1986, No. 4, Pp. 7–10. (rus)

17. **Azaryeva Ye.D., Khvoshchinskaya Z.G., Gruzdev I.A., Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Testovaya skhema dlya raschetov staticheskoy ustoychivosti energosistem [The test circuit for the calculation of static stability of power systems]. *Metody i programmnoye obespecheniye dlya raschetov kolebatelnoy ustoychivosti energosistem (FEO) [Methods and software for calculations of vibrational stability of power systems (FEO)]*. Leningrad, 1991, Pp. 88–105. (rus)

18. **Byerly R.T., Sherman D.E., Bennon R.J.** Frequency Domain Analysis of Low-Frequency Oscillations in Large Electric Power Systems. *EPRI EL-726, RP744-1 Interim Report*, Palo Alto, California, 1978.

19. **Gruzdev I.A., Starodubtsev A.A., Ustinov S.M., Shevyakov V.V.** Analiz staticheskoy ustoychivosti i dempfirovaniya nizkochastotnykh kolebaniy v obyedinennykh energosistemakh [Analysis of static stability and damping of low-frequency oscillations in the interconnections]. *Elektrichestvo [Electricity]*, 1991, No. 3, Pp. 1–5. (rus)

20. **Gruzdev I.A., Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Issledovaniye sobstvennykh dinamicheskikh svoystv protyazhennykh elektroenergeticheskikh

obyedineniy [A study of the dynamic properties of their own extensive electric power associations]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1993, No. 1, Pp. 102–114. (rus)

21. **Ustinov S.M., Maslennikov V.A.** Analiz obshchesistemnykh nizkochastotnykh kolebaniy v bolshikh energoobyedineniyakh [Analysis of system-wide low-frequency oscillations in large power systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1998, No. 2, Pp. 91–107. (rus)

22. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Nizkochastotnyye sistemnyye kolebaniya i ustoychivost obyedinennykh energosistem [Low-frequency vibrations of the system and the stability of the interconnected systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 2001, No. 4, Pp. 69–81. (rus)

23. **Ustinov S.M., Milanović J.V., Maslennikov V.A.** Inherent dynamic properties of interconnected power systems. *Int. J. Elect. Power & Energy Syst.* 2002, Vol. 22, Pp. 371–378.

24. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Staticheskaya ustoychivost protyazhennykh elektroperedach s upravlyayemyimi shuntiruyushchimi reaktorami [Static stability of extended power with controlled shunt reactor]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1995, No. 1, Pp. 58–65. (rus)

25. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Dinamicheskiye svoystva i staticheskaya ustoychivost dalnikh elektroperedach s upravlyayemyimi shuntiruyushchimi reaktorami [The dynamic properties and static stability of long-distance power with controlled shunt reactor]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1999, No. 3, Pp. 68–78. (rus)

26. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M.** Metodika ranzhirovaniya nagruzok po ikh vliyaniyu na staticheskuyu ustoychivost energosistem [Methods ranging loads on their influence on static stability of power systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1998, No. 6, Pp. 63–73. (rus)

27. **Maslennikov V.A., Milanović J.V., Ustinov S.M.** Robust Ranking of Loads by Using Sensitivity Factors and Limited Number of Points From a Hyperspace of Uncertain Parameters. *IEEE Trans. on Power Systems*, 2002, Vol. 17, No. 3, Pp. 565–570.

28. **Gruzdev I.A., Ustinov S.M.** Metodika ekvivalentirovaniya pri poiske optimalnykh nastroyek regulyatorov vozbuzhdeniya [Methods equivalenting finding optimal excitation controller settings]. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport [Energetics and transport]*, 1987, No. 1, Pp. 38–43. (rus)

29. **Ustinov S.M.** Metod uproscheniya matematicheskikh modeley dlya upravleniya dempferymi svoystvami elektroenergeticheskikh

system [The method of simplifying the mathematical models for the management of electric power systems damper properties]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1992, No. 2, Pp. 44–54. (rus)

30. **Ustinov S.M., Maslennikov V.A.** Metod approksimatsii modalnogo upravleniya dempfernymi svoystvami energosistem [The method of approximation of the modal properties of power systems control damper]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1999, No. 1, Pp. 121–132. (rus)

31. **Ustinov S.M., Maslennikov V.A.** Approksimatsiya modalnogo upravleniya v zadachakh staticheskoy ustoychivosti energosistem [Approximation of modal control in the problem

of static stability of power systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 2006, No. 5, Pp. 91–97. (rus)

32. **Ustinov S.M., Maslennikov V.A.** Problemy adaptatsii pri upravlenii staticheskoy ustoychivostyu bolshikh energoobyedineniy [Problems of adaptation in managing large static stability of power systems]. *Izv. RAN. Energetika [Energetics]*, 1998, No. 5, Pp. 7–16. (rus)

33. **Maslennikov V.A., Ustinov S.M., Milanović J.V.** Method for considering uncertainties for robust tuning of PSS and evaluation of stability limits. *IEEE Proc.-Gener. Transm. Distrib*, 2002, Vol. 149, No. 3, Pp. 295–299.

УСТИНОВ Сергей Михайлович — профессор кафедры информационных и управляющих систем Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, доктор технических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
E-mail: usm50@yandex.ru

USTINOV Sergey M. *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.*
195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.
E-mail: usm50@yandex.ru