



УДК 681.3 (075.8)

Н.В. Ростов

СИНТЕЗ И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

N.V. Rostov

SYNTHESIS AND MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF NONLINEAR QUASI TIME-OPTIMAL DIGITAL CONTROLLERS

Изложена методика синтеза и многокритериальной параметрической оптимизации позиционных следящих систем с квазиоптимальными по быстродействию цифровыми регуляторами на основе компьютерного зондирования и выбора Парето-оптимальных настроек их параметров. Приведен пример оптимизации нелинейного цифрового регулятора следящей системы с линейным объектом управления.

ПОЗИЦИОННЫЕ СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ; КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ; СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ; МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ; ЗОНДИРОВАНИЕ; ПАРЕТО-РЕШЕНИЯ.

In this paper some formulations of synthesis and multiobjective parameter optimization problems of digital servo systems with quasi time-optimal controllers are discussed and computer-aided techniques based on searching the Pareto-solutions are proposed. A practical example is given to demonstrate the multiobjective parameter tuning of nonlinear digital controller for servo system with linear plant.

ROBOT MOTION CONTROL SYSTEMS; INVERSE KINEMATIC PROBLEMS; ITERATIVE METHODS; ALGORITHM CONVERGENCE; REGULARIZATION.

Для позиционных следящих систем отработка входных воздействий и внешних возмущений ступенчатого вида являются характерными режимами их работы, в которых требуется обеспечивать максимально возможное быстродействие динамических процессов при отсутствии перерегулирования и высокую статическую точность. В многоконтурных следящих системах во внутренних контурах момента и скорости обычно применяются линейные ПИ и ПИД-регуляторы, обеспечивающие стабилизацию процессов при действии нестационарных параметрических и внешних возмущений. Регуляторы внешних контуров положения с линейными или нелинейными структурами ответственны за точность, быстродействие и качество переходных процессов управления выходными координатами. Их синтез часто проводят по упрощенным моделям объектов управления (ОУ), включающим

в себя линеаризованные модели предварительно оптимально настроенных (синтезированных) замкнутых контуров скорости.

Математически синтез нелинейного оптимального по быстродействию цифрового управления формулируется как задача перевода вектора состояния объекта управления $X[n+1] = A \cdot X[n] + B \cdot u[n]$ из начального положения $X(0)$ в конечное $X(N) = 0$ за минимальное число периодов дискретности переходного процесса и нахождения соответствующего управления $u[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, минимизирующего критерий $J(u) = N$ с учетом ограничений на амплитуду управления $|u[n]| \leq U_0$ [1]. В такой постановке задача синтеза решается методами, базирующимися на принципе максимума или динамического программирования [1, 2, 8, 9].

Однако синтезированный теоретическими методами алгоритм оптимального

управления в виде нелинейной функции непрерывного или дискретного времени требует измерения или наблюдения полного вектора состояния объекта. Получить аналитические выражения для оптимального регулятора в замкнутой системе можно только для линейных объектов второго или третьего порядка [2, 3]. Для систем с линейными ОУ более высокого порядка и нелинейными объектами возможен лишь синтез квазиоптимальных регуляторов [4, 7]. Однако на практике из-за противоречивости критериев, оценивающих показатели динамических процессов в контуре положения, возникающих при действии входных и возмущающих воздействий, приходится осуществлять компромиссную настройку параметров таких нелинейных регуляторов.

В [5] изложена методика последовательной многокритериальной (МК) оптимизации нелинейных цифровых систем автоматического управления (САУ) с итерационной скалярной оптимизацией на начальных этапах для локализации Парето-области, проведением зондирования пространства параметров регулятора и выбором решений в ограниченной ее окрестности. В [6] предложена методика многокритериальной настройки параметров типовых цифровых регуляторов ПИ и ПИД-типа в системах стабилизации и следящих системах в различных динамических режимах с учетом нелинейностей и при действии внешних возмущений.

Ниже рассматриваются постановки задач структурно-параметрического синтеза цифровых регуляторов, квазиоптимальных по быстродействию, формулируются критерии для их векторной оптимизации и предлагается методика поиска Парето-оптимальных настроек параметров таких нелинейных регуляторов на основе прямого зондирования с оцениванием показателей переходных процессов в цифровых следящих системах при действии входных и внешних возмущений по результатам дискретно-непрерывного моделирования. При оптимизации следует также учитывать нелинейности в ОУ и особенности цифровой реализации регуляторов. Примене-

ние методики иллюстрируется на примере Парето-оптимальной настройки параметров регулятора положения цифровой следящей системы с линейным объектом управления третьего порядка.

Задачи структурно-параметрического синтеза квазиоптимальных цифровых регуляторов. Управление будет приближенно оптимальным в смысле критерия максимального быстродействия в тех случаях, когда:

- синтез системы проведен с использованием редуцированной линейной модели объекта управления;
- алгоритм управления, полученный в результате синтеза, упрощен при его реализации;
- при синтезе системы изначально выбрана упрощенная структура регулятора.

В последнем случае математическая строгость задачи оптимального синтеза снижается, т. к. структура регулятора выбирается заранее из конечного множества возможных вариантов.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют следующие два подхода к синтезу квазиоптимальных цифровых регуляторов.

Дискретизация оптимального регулятора, синтезированного для редуцированного линейного объекта управления. Алгоритм непрерывного оптимального по быстродействию регулятора имеет вид

$$u(t) = U_0 \cdot \text{sign}S(e(t), \bar{y}(t)), \quad (1)$$

где $e(t)$ – ошибка системы; $\bar{y} = (\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(m-1)})^T$ – вектор производных выходной координаты; $S(e, \bar{y})$ – поверхность переключения; $U_0 = \text{const}$.

Для линейных объектов управления второго порядка ($m = 2$) аналитическая линия переключения проста для реализации и, если период дискретности T_0 достаточно мал, то при конечно-разностной аппроксимации производных в алгоритме (1) дискретный алгоритм будет обеспечивать процессы, близкие к оптимальным.

В случае линейных объектов управления высокого порядка и нелинейных объектов предпочтительнее второй подход.

Синтез дискретного квазиоптимального регулятора с упрощенной структурой. Алго-

ритм такого регулятора может иметь следующий вид:

$$u[n] = U_0[n] \cdot \text{sign} S_a(e[n], \bar{y}[n]), \quad (2)$$

где $\bar{y}[n] = (\nabla y[n], \dots, \nabla^{m-1} y[n])^T$ – вектор разностей выходной координаты; $S_a(e[n], \bar{y}[n])$ – аппроксимированная поверхность переключения.

При релейном цифровом управлении, когда $U_0[n] = \text{const}$, обычно возникают нежелательные колебания выходной координаты ОУ при пересечениях фазовой траекторией поверхности переключения и в окрестности начала фазовых координат. Используя управление, при котором $U_0[n] = \text{var}$, можно минимизировать или полностью исключить такие колебания.

В общем случае предполагается, что для алгоритма (2) поверхность переключения определяется сначала в табличной форме по результатам моделирования ОУ, а затем аппроксимируется квадратичной, кубической или более сложной нелинейной поверхностью [2].

Структурная схема цифровой следящей системы с квазиоптимальным по быстродействию регулятором представлена на рис. 1, где $g[n]$, $y[n]$ – входное воздействие и выходная координата; $e[n]$ – ошибка системы; $f(t)$ – внешнее возмущение.

Цифровой регулятор содержит: РБ – разностный блок; ФП – функциональный преобразователь; РЭ – релейный элемент; Э₀ – фиксатор (экстраполятор нулевого порядка); T_0 – период квантования сигналов по времени.

Этапы синтеза квазиоптимальных цифро-

вых регуляторов. Компьютерный синтез регулятора включает в себя следующие пять этапов.

1. Дискретизация непрерывной модели объекта управления. Дискретная модель объекта позволяет определять поверхность переключения непосредственно в пространстве дискретных фазовых координат без конечно-разностной аппроксимации производных.

2. Определение поверхности переключения в табличной форме. В качестве такой поверхности может быть выбрано семейство фазовых траекторий объекта, проходящих через начало координат, определяемых путем дискретного моделирования ОУ при ненулевых начальных условиях.

3. Аппроксимация табличной поверхности переключения. С точки зрения упрощения реализации регулятора практический интерес представляет квадратичная аппроксимация поверхности переключения:

$$S_a(e[n], \bar{y}[n]) = e[n] - \beta_1^T \bar{y}[n] - \bar{y}^T[n] \beta_{II} \bar{y}[n], \quad (3)$$

где β_1 – $(m-1)$ -вектор и β_{II} – $(m-1) \times (m-1)$ -матрица коэффициентов, которые могут быть определены, например, регрессионным методом.

В частности, квадратичная линия переключения, симметричная относительно начала координат $e[n]$ и $\nabla y[n]$, имеет вид

$$S_a(e[n], \nabla y[n]) = e[n] - \beta_1 \cdot \nabla y[n] - \beta_2 \cdot (\nabla y[n] \cdot |\nabla y[n]|), \quad (4)$$

где параметры β_1 и β_2 можно найти, решая соответствующую систему алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей

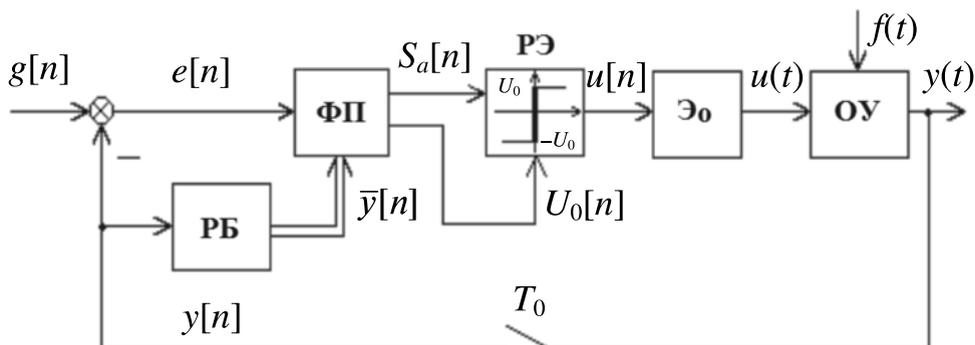


Рис. 1. Структурная схема квазиоптимальной цифровой следящей системы

$$A_{vy} \cdot X = B_e, \quad (5)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{vy} = \begin{pmatrix} \nabla y[1] & \nabla y[1] \cdot |\nabla y[1]| \\ \dots & \dots \\ \nabla y[N] & \nabla y[N] \cdot |\nabla y[N]| \end{pmatrix};$$

$$B_e = \begin{pmatrix} e[1] \\ \dots \\ e[N] \end{pmatrix}.$$

Регрессионная $N \times 2$ -матрица A_{vy} и N -вектор B_e составляются по табличным данным. Псевдорешение переопределенной системы (5) имеет следующий вид:

$$X = (A_{vy}^T \cdot A_{vy})^{-1} \cdot A_{vy}^T \cdot B_e.$$

Ошибка аппроксимации будет зависеть не только от кривизны фазовых траекторий объекта, но и от обусловленности матрицы $(A_{vy}^T \cdot A_{vy})$.

4. Модификации структуры цифрового регулятора. Выбирая тот или иной вариант изменения амплитуды релейного элемента $U_0[n]$ в фазовом пространстве, можно получать разные алгоритмы квазиоптимальных регуляторов.

- Управляющее воздействие можно уменьшать по мере приближения к началу фазовых координат

$$U_0[n] = K_0 \cdot (|e[n]| + |\nabla y[n]| + \dots + |\nabla^{m-1} y[n]|), \quad (6)$$

в простейшем варианте $U_0[n] = K_0 \cdot |e[n]|$.

- Более «мягкое» управление в окрестности поверхности переключения можно получать, когда

$$U_0[n] = K_0 \cdot |S_a(e[n], \bar{y}[n])|,$$

что эквивалентно аппроксимации релейного элемента нелинейной функцией saturation (насыщение)

$$u[n] = \text{sat}(K_0 \cdot S_a(e[n], \bar{y}[n])), \quad (7)$$

где K_0 – коэффициент передачи на ее линейном участке с ограничением модуля управляющего воздействия $u[n]$ на заданном уровне U_{\max} .

5. Параметрическая оптимизация ре-

гулятора. Из-за ошибок аппроксимации поверхности переключения, а также для исключения нежелательного скользящего режима, необходима оптимизация параметров квазиоптимального регулятора итерационными численными методами с использованием линейной или нелинейной модели ОУ. Предварительную оптимизацию можно проводить по интегральным критериям, а заключительную многокритериальную – по совокупности показателей переходных процессов в замкнутой цифровой следящей системе.

Постановка задачи МК-оптимизации цифровых квазиоптимальных по быстродействию следящих систем. В зависимости от назначения следящей системы векторные критерии могут состояться из различных пар частных критериев $F_i(\theta) = [f_1, f_2]^T$, зависящих от значений θ – вектора настраиваемых параметров регулятора.

Векторный критерий может включать в себя интегральные квадратичные оценки переходного процесса произвольного вида, вычисляемые в дискретном времени:

$$F_1(\theta) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^2[n], \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N u^2[n] \right] \rightarrow \min, \quad (8)$$

где $e[n] = (g[n] - y[n])$ – ошибка системы; $u[n]$ – управляющее воздействие; N – число периодов дискретности протекания переходного процесса. Первый частный критерий косвенно оценивает быстродействие системы, а второй – энергозатраты на управление.

В следящих системах должны оцениваться прямые показатели переходного процесса по входному воздействию:

$$F_2(\theta) = [T_g, \sigma]^T \rightarrow \min, \quad (9)$$

где T_g – время переходного процесса; σ – перерегулирование. Но в случаях сильно колебательной или расходящейся переходной характеристики системы они не могут быть определены по результатам моделирования.

Векторный критерий должен содержать также оценки показателей инвариантности системы, определяемых при действии ступенчатого внешнего возмущения:

$$F_3(\theta) = [T_f, |e_f|_{\max}]^T \rightarrow \min, \quad (10)$$

где T_f – время переходного процесса по возмущению; $|e_f|_{\max}$ – соответствующая максимальная динамическая ошибка.

Указанные выше критерии необходимо оценивать при проведении зондирования динамики в пространстве параметров регуляторов с моделированием процессов в цифровой следящей системе в следующих двух режимах:

- при ступенчатом входном воздействии $g[n]$ и нулевом внешнем возмущении $f(t)$;
- при действии ступенчатого внешнего возмущения $f(t)$.

В конкретных задачах оптимизации полный векторный критерий может формироваться из разных комбинаций пар частных критериев (8)–(10), а также из других критериев, оценивающих точностные показатели следящей системы в контурном режиме ее работы [5].

Пример МК-оптимизации цифрового квазиоптимального по быстродействию регулятора. На рис. 2 представлена схема Simulink-модели контура положения следя-

щей системы с линейным объектом управления третьего порядка

$$W(s) = \frac{K}{(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)s},$$

в котором внутренний контур скорости представлен колебательным звеном с параметрами $K = 1,0 \text{ с}^{-1}$; $T = 0,05 \text{ с}$. Структура цифрового регулятора положения (рис. 3) соответствует алгоритму (7) с квадратичной линией переключения (4). Внешнее возмущение имитируется резким снижением скорости при ступенчатом возмущении $f(t)$ при приеме внешней нагрузки.

Для оптимизации регулятора положения было проведено прямое зондирование его динамики на случайной сетке в пространстве трех параметров (β_1, β_2, K_0) с оцениванием критериев (8)–(10) в соответствующих переходных процессах. На рис. 4 представлены выделенные три варианта результатов зондирования, для которых параметры регулятора имеют следующие значения:

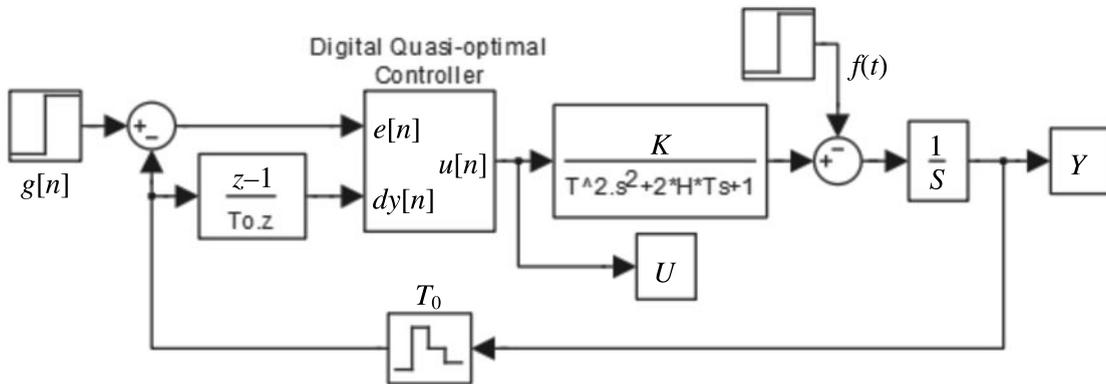


Рис. 2. Модель контура положения квазиоптимальной цифровой следящей системы

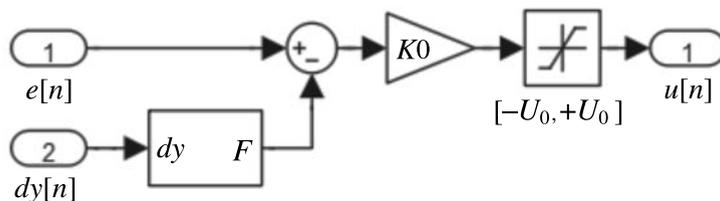


Рис. 3. Макроблок регулятора

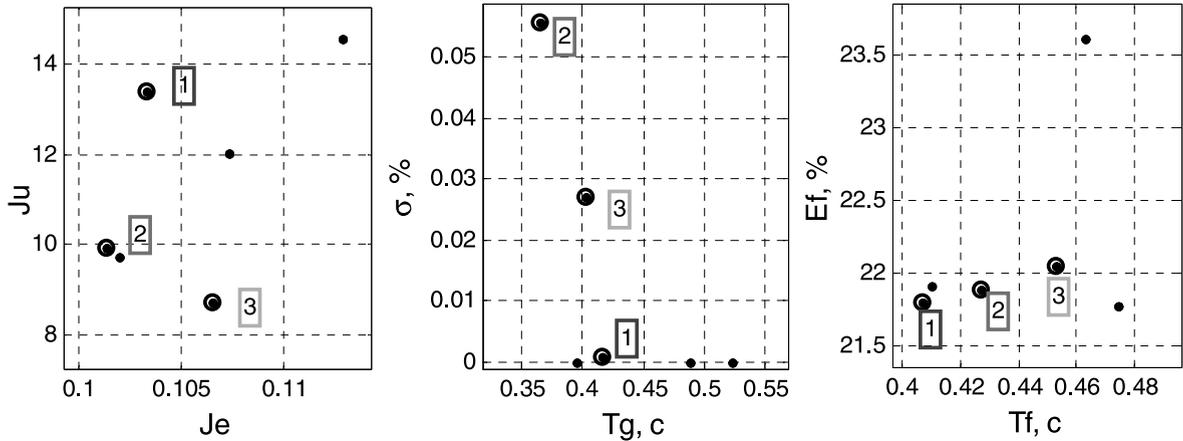


Рис. 4. Результаты зондирования

- (1) $\beta_1 = 0,0800$; $\beta_2 = 0,0017$; $K_0 = 54,4534$
- (2) $\beta_1 = 0,0619$; $\beta_2 = 0,0030$; $K_0 = 28,5422$
- (3) $\beta_1 = 0,0534$; $\beta_2 = 0,0088$; $K_0 = 24,7685$

На рис. 5 приведены кривые соответствующих квазиоптимальных переходных процессов и фазовых портретов.

Выбранные варианты значений параметров регулятора положения являются Парето-оптимальными: 2 и 3 – по критерию F_1 ; 1 – по критериям F_2 и F_3 . На-

стройка по первому варианту обеспечивает достижение максимального быстродействия при отсутствии перерегулирования в переходном процессе по входному воздействию. Однако по критерию J_u , оценивающему энергозатраты на управление, такая настройка не является Парето-оптимальной.

Заметим также, что статическая ошибка, возникающая в переходном процессе при внешнем возмущающем воздействии, в реальных следящих системах будет устраняться ПИ-регулятором внутреннего кон-

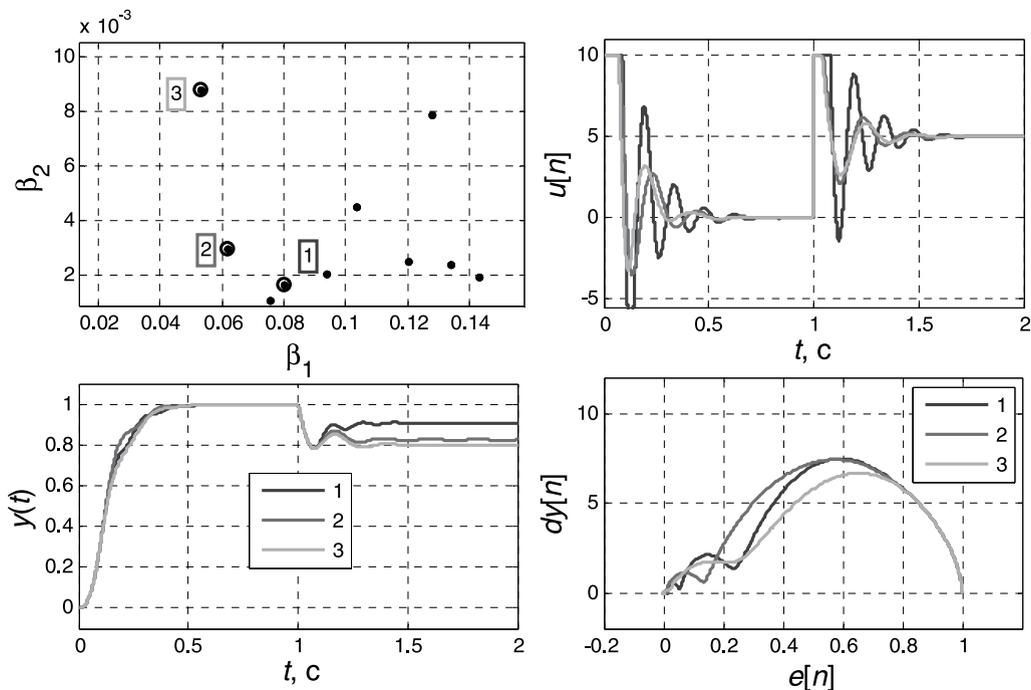


Рис. 5. Варианты настройки регулятора



тура скорости, обеспечивающим в системе астатизм второго порядка.

По изложенной выше методике можно сделать следующее заключение.

Определение на завершающем этапе синтеза квазиоптимальных по быстродействию цифровых регуляторов Парето-оптимальных значений их параметров по критериям (8)–(10) является практически важной задачей, т. к. они потенциально обеспечивают наилучшие показатели в позиционном режиме работы следящих систем.

Векторная оптимизация, в отличие от скалярной оптимизации по эталонным моделям или по интегральному критерию с субъективно задаваемыми весовыми коэффициентами, позволяет принимать по результатам зондирования объективные компромиссные и технически рациональные решения по настройке параметров регуляторов.

Предложенная методика имеет общий характер, поскольку она может применяться при МК-настройке параметров цифровых нелинейных квазиоптимальных регуляторов и с более сложными структурами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления // Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб. в 3 т. Т. 2. Под ред. Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
2. **Иванов В.А., Фалдин Н.В.** Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981.
3. **Клюев А.С., Колесников А.А.** Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982.
4. **Ловчаков Е.В., Соловьев А.Э.** Метод синтеза квазиоптимальных систем управления по критериям быстродействия и энергосбережения // Известия ТулГУ. Технические науки. 2011. Вып. 5. С. 220–230.
5. **Ростов Н.В.** Последовательная многокритериальная оптимизация регуляторов нелинейных систем автоматического управления

// Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2010. № 6(113). С. 44–50.

6. **Ростов Н.В.** Многокритериальная параметрическая оптимизация цифровых регуляторов с учетом нелинейностей и действия внешних возмущений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2014. № 2(193). С. 91–98.

7. **Фалдин Н.В., Феофилов С.В.** Прикладные методы синтеза оптимальных по точности и быстродействию релейных следящих приводов // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2011. № 10. С. 38–44.

8. **Donald E. Kirk.** Optimal Control Theory: An Introduction. Prentice-Hall Inc., 1970.

9. **Kuo B.C.** Digital Control Systems. 2nd ed. Saunders College Publishing, 1992.

REFERENCES

1. Sintez regulyatorov i teoriya optimizatsii sistem avtomaticheskogo upravleniya, *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya*. T.2. Pod red. N.D. Yegupova. Moscow: MGTU imeni N.E. Bauman Publ., 2000. (rus)
2. **Ivanov V.A., Faldin N.V.** *Teoriya optimalnykh sistem avtomaticheskogo upravleniya*. Moscow: Nauka Publ., 1981. (rus)
3. **Klyuyev A.S., Kolesnikov A.A.** *Optimizatsiya avtomaticheskikh sistem upravleniya po bystrodeystviyu*. Moscow: Energoizdat Publ., 1982. (rus)
4. **Lovchakov E.V., Solovjev A.E.** Metod sinteza kvaziopimalnykh sistem upravleniya po kriteriyam bystrodeystviya i energosberezeniya, *Izvestiya TulGU. Tehnicheskie nauki*, 2011, No. 5, Pp. 220–230. (rus)

5. **Rostov N.V.** Posledovatel'naya mnogokriterial'naya optimizatsiya regulyatorov nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya, *Nauchno-tekhnicheskkiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye*. St. Petersburg: SPbGPU Publ., 2010, No. 6(113), Pp. 44–50. (rus)

6. **Rostov N.V.** Mnogokriterial'naya parametricheskaya optimizatsiya tsifrovyykh regulyatorov s uchetom nelineynostey i deystviya vneshnikh vozmushcheniy, *Nauchno-tekhnicheskkiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye*. St. Petersburg: SPbGPU Publ., 2014, No. 2(193), Pp. 91–98. (rus)

7. **Faldin N.V., Feofilov S.V.** Ppikladnyie metodyi sinteza optimalnykh po tochnosti i byistpodeystviyu peleynykh sledyaschih ppivodov, *Mehatronika*.

- Avtomatizatsiya. Upravlenie*, 2011, No. 10, pp. 38–44. (rus) *Introduction*, Prentice-Hall Inc., 1970.
9. **Kuo B.C.** *Digital Control Systems*, 2nd ed.,
Saunders College Publishing, 1992.
8. **Donald E. Kirk.** *Optimal Control Theory: An*
-

РОСТОВ Николай Васильевич — доцент кафедры систем и технологий управления Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, кандидат технических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: rostovnv@mail.ru

ROSTOV, Nicolay V. *St. Petersburg Polytechnic University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: rostovnv@mail.ru