

УДК 536.421

*Е.Д. Екатеринчук, Т.В. Рязанова, Л.Б. Ряшко*

## **ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ БИЗНЕС-ЦИКЛОВ ГУДВИНА**

*E.D. Ekaterinchuk, T.V. Ryazanova, L.B. Ryashko*

### **NOISE-INDUCED TRANSITIONS FOR BUSINESS CYCLES GOODWIN MODEL**

Рассмотрена модель экономической динамики Гудвина, находящаяся под воздействием случайных возмущений. Исследованы вероятностные свойства аттракторов стохастической системы с использованием техники функций стохастической чувствительности и метода прямого численного моделирования. Опираясь на данную методику, построены доверительные области (эллипсы и полосу). Найдены критические интенсивности вносимого шума, при которых происходят переходы из бассейна притяжения одного аттрактора в бассейн другого.

**МОДЕЛЬ ГУДВИНА; БИЗНЕС-ЦИКЛЫ; СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ; ФУНКЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ; ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ; ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ.**

The Goodwin economic dynamical model under random disturbances is considered. We study probabilistic properties of stochastic attractors numerically and theoretically via stochastic sensitivity functions technique. Confidence domains are constructed on the base of this method. We have found critical values of the noise intensity corresponding to the noise-induced transitions between basins of attractors.

**GOODWIN MODEL; BUSINESS CYCLES; RANDOM DISTRIBUTIONS; STOCHASTIC SENSITIVITY FUNCTION; NOISE-INDUCED TRANSITIONS; CONFIDENT DOMAINS.**

Рассматривается модель экономической динамики Гудвина [1] — модель нелинейного акселератора-мультипликатора, которая может быть записана в виде:

$$\zeta\theta\ddot{x}(t) + (\zeta + (1-a)\theta)\dot{x}(t) - \varphi(\dot{x}(t)) + (1-a)x(t) = O^*(t),$$

где  $x$  — доход;  $a$  — предельный уровень потребления;  $\zeta$  — константа, представляющая запаздывание в динамике коэффициента развития;  $\theta$  — запаздывание между решением об инвестировании и соответствующими расходами;  $\varphi(\dot{x})$  — инвестиции, индуцированные изменениями дохода;  $O^*(t)$  — размер независимых издержек по времени. Обобщенная форма этого уравнения дана Лоренцем [2]:

$$\ddot{x}(t) + A(x(t))\dot{x}(t) + B(x(t)) = O^*(t),$$

здесь  $x$  — отклонение дохода от равновесия;  $A(x)$  — четная функция с условиями  $A(0) < 0$ ;  $A''(0) > 0$ ;  $B(x)$  — нечетная функция с условием  $B(0) = 0$ ;  $O^*(t)$  — функция издержек.

В своих исследованиях Лоренц и Нуссэ [3] предложили конкретный вид функций  $A(x)$  и  $B(x)$ :

$$\ddot{x} + a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \dot{x} - bx + cx^3 = O^*,$$

Функцию  $O^*(t)$  можно трактовать как некоторое внешнее воздействие. Если  $O^*(t)$  — периодическая функция, то модель демонстрирует переходы от регулярных ко-

лебаний к хаотическим. Различные модификации модели Гудвина исследованы в ряде работ (например [4–7]). Несомненный интерес представляет анализ модели, когда  $O^*(t)$  является случайной функцией.

В данной статье рассматривается стохастическая модель экономической динамики Гудвина, задаваемая дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{x} + a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \dot{x} - bx + cx^3 = \varepsilon \dot{\omega}, \quad (1)$$

где  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;  $\omega$  – стандартный винеровский процесс;  $\varepsilon$  – интенсивность шума.

### Детерминированные аттракторы модели Гудвина

Запишем детерминированную модель Гудвина (1) ( $\varepsilon = 0$ ) в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} y + bx - cx^3. \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) существуют три равновесия  $M_0(0, 0), M_1\left(\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right), M_2\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right)$ .

Они лежат на оси  $Ox$  и имеют абсциссы, не зависящие от параметра  $a$ . Равновесия  $M_1, M_2$  симметричны относительно  $M_0$ .

Проведенный анализ показывает, что равновесие  $M_0$  при любых значениях пара-

метров является седлом. Это означает, что взятое за точку отсчета нулевое положение переменной дохода всегда неустойчиво. Локальные фазовые портреты равновесий  $M_1, M_2$  имеют один тип. Их параметрическое описание представлено в сводной бифуркационной диаграмме (рис. 1).

Здесь для  $a = 2$  представлены следующие зоны: А – устойчивый узел;  $B \cup C \cup D$  – устойчивый фокус; Е – неустойчивый фокус; F – неустойчивый узел. Три границы, разделяющие зоны, имеют следующие аналитические представления:

$$\psi_1(a, b) = \frac{b}{a^2 - 8b}(a^2 + 8b - 4a\sqrt{2b}),$$

$$\psi_4(a, b) = b,$$

$$\psi_5(a, b) = \frac{b}{a^2 - 8b}(a^2 + 8b + 4a\sqrt{2b}).$$

Граница  $c = \psi_2(a, b)$  (пунктирная линия) соответствует бифуркационной кривой, отвечающей жесткому рождению полуустойчивого цикла. При увеличении параметра  $c$  полуустойчивый цикл распадается на два цикла: устойчивый и неустойчивый. Граница  $c = \psi_3(a, b)$  соответствует разделению одного неустойчивого цикла на два, ограничивающие бассейны притяжения устойчивых равновесий  $M_1, M_2$ . Кривые  $\psi_2(a, b)$  и  $\psi_3(a, b)$ , не имеющие аналитического представления, были найдены численными методами. Таким образом, зоны С и D представляют наибольший интерес для изучения, как зоны параметров одновременного сосуществования устойчивых равновесий и цикла.

На рис. 2 а представлены поведения детерминированной системы в момент рождения полуустойчивого цикла ( $c = 0,155332$ ), здесь жирной сплошной линией изображен полуустойчивый цикл, тонкими сплошными – траектории системы. Как видно, траектории, выпущенные извне цикла, наматываются на него, тогда как выпущенные внутри цикла – на одно из равновесий. На рис. 2 б представлено характерное поведение системы в зоне D (при  $c = 0,18$ ). Здесь жирной сплошной линией изображен устойчивый цикл, пунктиром – два неустойчивых цикла, тонкими сплошными – фазовые траектории. Нетрудно заметить,

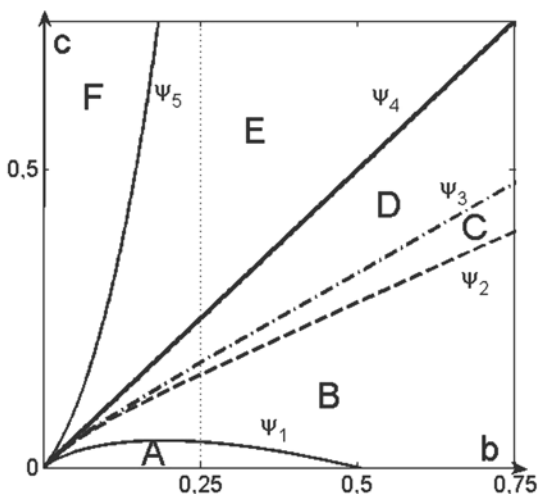


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма при  $a = 2$

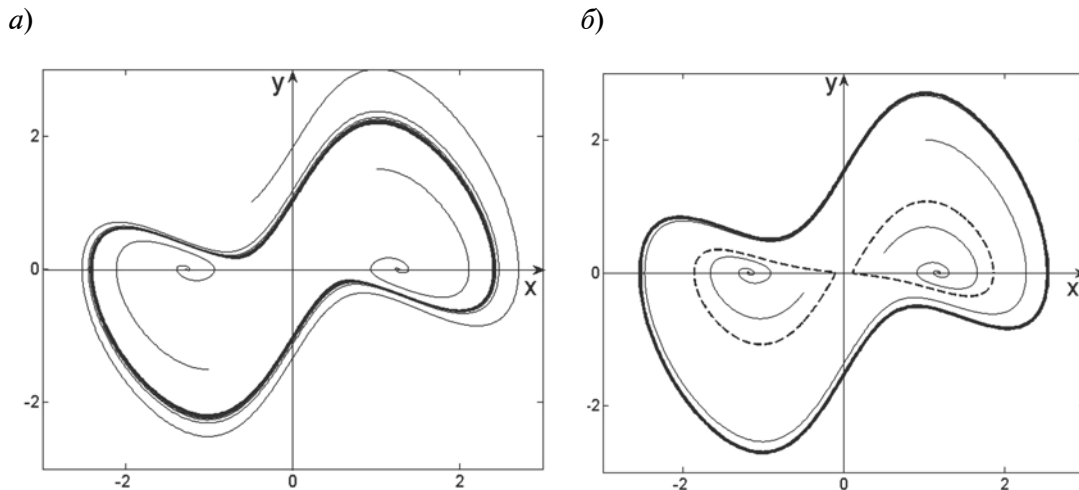


Рис. 2. Фазовые траектории для  $a = 2, b = 0,25$ :  
 а – при  $c = 0,155332$ ; б – при  $c = 0,18$

что неустойчивые циклы разграничивают бассейны притяжения устойчивых равновесий и устойчивого цикла. Более подробный анализ детерминированной динамики можно найти в работе [8].

**Чувствительность стохастических аттракторов**

Функционирование любой экономической системы всегда сопровождается случайными возмущениями как внешними (аддитивными), так и внутренними (параметрическими). Присутствие случайного фактора приводит к деформации режимов динамического поведения исходной детерминированной модели. Анализ влияния случайных возмущений на динамику системы проводится с помощью аппарата функции стохастической чувствительности.

**Функция стохастической чувствительности.** В результате действия шумов случайные траектории системы покидают детерминированный аттрактор и формируют некоторый стохастический аттрактор со стационарным распределением  $\rho(x, \varepsilon)$ . Функция  $\rho(x, \varepsilon)$  удовлетворяет стационарному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Непосредственное использование этого уравнения уже для двумерных систем является технически трудной задачей. В этих обстоятельствах широко используются методики, основанные на функции квази-

потенциала  $v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon)$ .

Квазипотенциал [9] связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби. Уравнение Гамильтона–Якоби выглядит проще, чем стационарное уравнение, однако и его точное решение является весьма сложной задачей. В работах Л.Б. Ряшко, И.А. Башкирцевой [10] предложен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики в малой окрестности исследуемого аттрактора.

Доказано, что положительно определенная матрица  $W$  – матрица стохастической чувствительности – является решением алгебраического уравнения  $FW + WF^T = -S$ , где  $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), S = GG^T, G = \sigma(\bar{x})$ .

Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы вокруг равновесия  $\bar{x}$ .

В случае цикла на плоскости матрицы  $W(t)$  и  $P(t)$  имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = m(t)P(t), P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь  $p(t)$  – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору  $f(\xi(t))$ , а  $m(t) > 0$  – T-периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию)

пучка по нормали к циклу. Функция  $m(t)$  удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} \dot{m} = a(t)m + b(t) \\ m(0) = m(T) \end{cases}$$

с  $T$ -периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} a(t) &= p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \\ b(t) &= p^T(t)S(t)p(t). \end{aligned}$$

Функция  $m(t)$  определяет локальную стохастическую чувствительность цикла в точке  $\xi(t)$ . Удобной характеристикой стохастического цикла в целом является коэффициент стохастической чувствительности  $M = \max m(t)$ , где  $0 < t < T$ .

Для изучения влияния случайных возмущений на динамику модели Гудвина перейдем к стохастической системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} y + bx - cx^3 + \varepsilon \omega, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\omega$  – стандартный винеровский процесс, моделирующий случайные внешние воздействия;  $\varepsilon$  – интенсивность шума.

Траектории системы под действием случайных возмущений покидают детерминированный аттрактор (равновесия или цикл) и формируют вокруг него некоторый пучок. При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора увеличивается.

Для стохастических равновесий модели (3) матрица стохастической чувствительности имеет диагональный вид:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{c+b}{4ab(b-c)} & 0 \\ 0 & \frac{c+b}{2a(b-c)} \end{pmatrix}.$$

На интервале сосуществования равновесий  $M_1, M_2$  и цикла, зависимость диагональных элементов  $w_{11}$  и  $w_{22}$  матрицы  $W$  от параметра  $c$  представлена на рис. 3 (сплошные линии). Как видно, стохастическая чувствительность равновесий при приближении параметра  $c$  к бифуркационному значению  $c_2 = 0,25$  монотонно возрастает и стремится к бесконечности. Также на рисунке представлен график зависимости коэффициента стохастической чувствительности  $M$  от параметра  $c$  (пунктир). Аналогично случаю стохастического равновесия здесь наблюдается неограниченный рост стохастической чувствительности при стремлении параметра  $c$  к значению  $c_1$  справа. При увеличении параметра  $c$  коэффициент чувствительности  $M$  монотонно стремится к нулю, что свидетельствует об уменьшении стохастической чувствительности цикла.

В зоне  $c_1 < c < c_2$  в системе сосуществуют стохастические равновесия и стохастический цикл, при этом для  $c_1^*$  чувствительность стохастического цикла больше чувствительности равновесия, что влечет

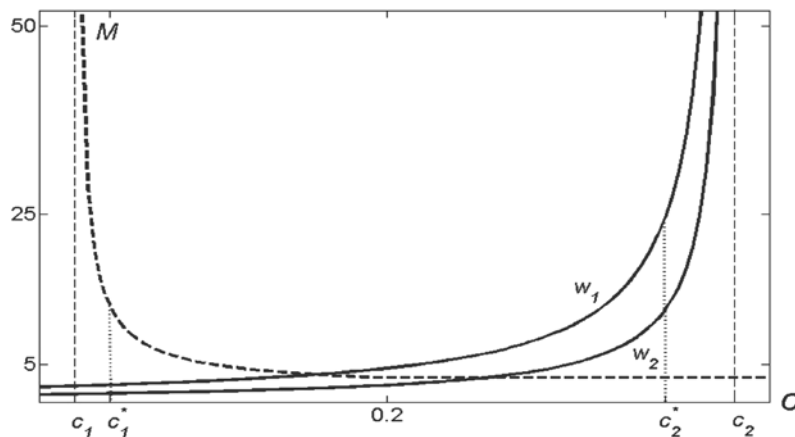


Рис. 3. Коэффициент стохастической чувствительности для цикла (-----) и для равновесия (—) при  $a = 2, b = 0,25$

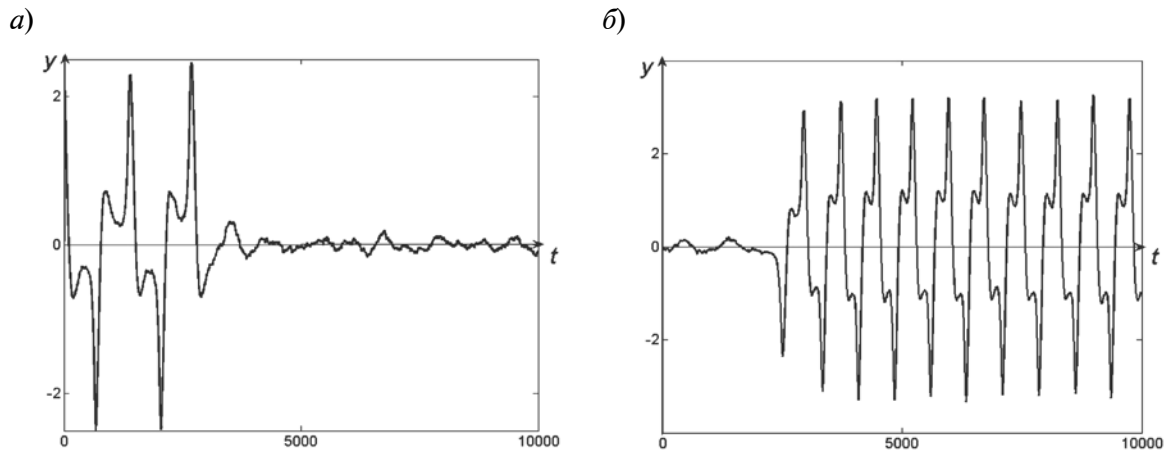


Рис. 4. Стохастическая траектория по времени переменной  $y$  при  $a = 2, b = 0,25, \varepsilon = 0,05$ :  
 $a$  – при  $c = 0,16$ ;  $b$  – при  $c = 0,24$

скорый переход из бассейна притяжения цикла на равновесие. При  $c_2^*$  наблюдается обратная картина перехода от стохастического равновесия на цикл. Данные переходы продемонстрированы на рис. 4 соответственно.

### Индукцированные шумом переходы

Опираясь на метод функции стохастической чувствительности вокруг детерминированных аттракторов можно построить области, в которые с заданной вероятностью будут попадать стохастические состояния. Для равновесия данной областью является эллипс [11], для цикла – полоса [12]. С заранее заданной вероятностью случайные состояния будут распределены внутри этой области.

**Построение доверительных областей.** Для построения эллипсов рассеивания используются следующие формулы:

$$x = \bar{x} + \frac{z_1 v_{22} - z_2 v_{12}}{\Delta},$$

$$y = \bar{y} + \frac{z_2 v_{11} - z_1 v_{21}}{\Delta},$$

где  $z_1(\varphi) = \sqrt{2\lambda_1} \varepsilon k \cos \varphi$ ,  $z_2(\varphi) = \sqrt{2\lambda_2} \varepsilon k \sin \varphi$ ,  $k^2 = -\ln(1 - P)$ ;  $\Delta$  – определитель матрицы, составленной из собственных векторов матрицы  $W$ .

Доверительные полосы строятся по следующим формулам:

$$x_{1,2} = \xi(t) \pm k\varepsilon\sqrt{2\mu(t)}p(t),$$

где  $k = \text{erf}^{-1}(P)$ ,  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

На рис. 5 *a* представлены стохастические состояния (точки), сепаратриса (пунктир) и эллипс рассеивания (сплошная) с доверительной вероятностью  $p = 0,95$ . В случае равновесия форма эллипса зависит от собственных чисел и векторов матрицы стохастической чувствительности  $W$ . Собственные векторы задают направления осей эллипса, а собственные значения их величину. Если собственные числа совпадают, то доверительной областью является окружность. Это значит, что отклонения случайных состояний от детерминированного равновесия будут равновелики как по оси  $Ox$ , так и по оси  $Oy$ . В случае, когда собственные значения разные, эллипс вытягивается больше вдоль собственного вектора, соответствующего большему собственному значению.

На рис. 5 *b* изображены стохастические состояния (точки), сепаратриса (пунктир) и доверительная полоса (сплошная) с вероятностью  $p = 0,95$ . Ширина полосы зависит от интенсивности вносимого шума и неравномерна вдоль цикла. Участки цикла более или менее чувствительные к вносимому шуму, распознаются функцией стохастической чувствительности и, как следствие, полоса на этих участках шире или уже.

Рассмотрим зону D параметров (см. рис. 1), где детерминированная система

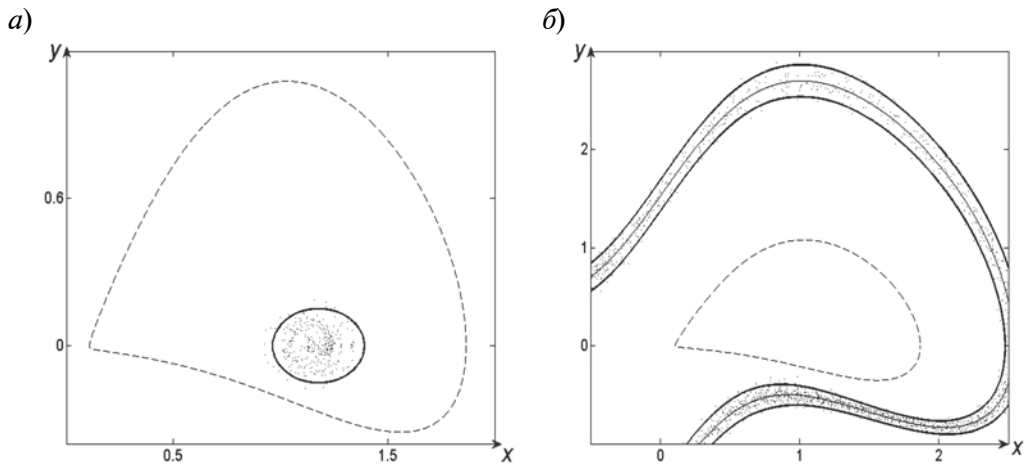


Рис. 5. Стохастические состояния ( $\cdot\cdot\cdot$ ), сепаратриса (-----) и эллипс рассеивания (—) при  $a = 2$ ,  $b = 0,25$ ,  $c = 0,18$ :  
 $a$  — для  $\varepsilon = 0,05$ ;  $b$  — для  $\varepsilon = 0,04$

имеет два устойчивых равновесия и устойчивый цикл. Индуцированные шумом переходы в системе возникают в том случае, когда случайное состояние «выпрыгивает» из бассейна притяжения одного аттрактора в другой.

При достаточно малой интенсивности вносимого шума (рис. 5 *a*) границы доверительного эллипса удалены от сепаратрисы, следовательно, с заданной вероятностью можно утверждать, что переходы между бассейнами притяжения равновесия и цикла наблюдаться не будут. Аналогичная картина наблюдается для доверитель-

ной полосы предельного цикла (рис. 5 *б*). Увеличение интенсивности случайного возмущения влечет увеличение облака рассеивания вокруг детерминированного аттрактора, что демонстрируется увеличением доверительных областей (эллипса и полосы). В момент, когда доверительная область едва касается сепаратрисы, возникают переходы случайных состояний из бассейна одного аттрактора в бассейн другого. На рис. 6 представлены возникающие переходы для обеих ситуаций: с равновесия на цикл (рис. 6 *a*) и с цикла на равновесие (рис. 6 *б*).

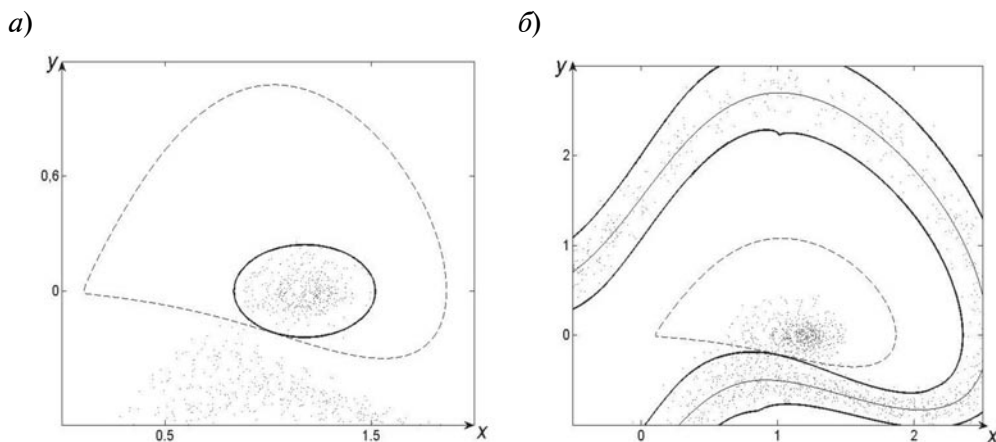


Рис. 6. Стохастические состояния ( $\cdot\cdot\cdot$ ), сепаратриса седла (- - -) и доверительная полоса (—) при  $a = 2$ ,  $b = 0,25$ ,  $c = 0,18$ :  
 $a$  — для  $\varepsilon = 0,08$ ;  $b$  — для  $\varepsilon = 0,115$

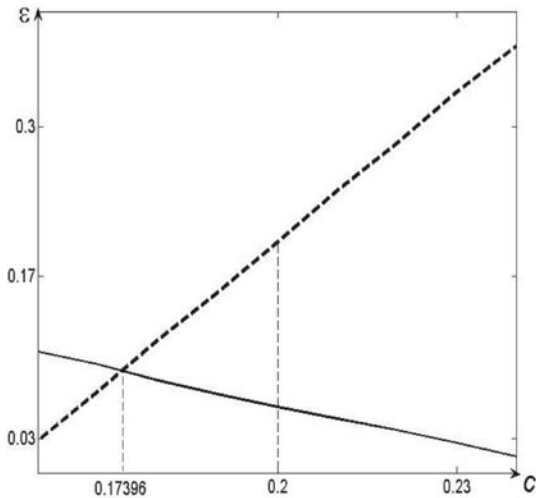


Рис. 7. Зависимость критической интенсивности аддитивного шума от параметра  $c$  при  $a = 2, b = 0,25$

С помощью представленной аналитической методики можно находить критические значения интенсивности шума, начиная с которого в системе наблюдаются переходы между бассейнами притяжения аттракторов. На рис. 7 представлены зависимости критической интенсивности аддитивного шума от параметра  $c$  для переходов типа «равновесие-цикл» и «цикл-равновесие».

При увеличении параметра  $c$  значение критической интенсивности для переходов типа «равновесие-цикл» уменьшается (сплошная линия на рис. 7), в то время как для переходов типа «цикл-

равновесие» наблюдается обратная зависимость (пунктир). Подобное поведение легко объяснить, наблюдая за изменением чувствительности в зависимости от параметра  $c$  (см. рис. 3). Увеличение параметра  $c$  влечет увеличение чувствительности равновесия, следовательно, при меньшей интенсивности шума будут наблюдаться отклонения, достаточные, чтобы случайное состояние попало в бассейн притяжения другого аттрактора. В свою очередь чувствительность цикла при увеличении параметра  $c$  уменьшается, следовательно, для реализации переходов между аттракторами необходимо случайное воздействие большей интенсивности.

Зафиксируем значение параметра  $c = 0,2$ , при этом значения критических интенсивностей значительно отличаются друг от друга. При фиксированном меньшем значении критической интенсивности возможны переходы только одного типа «равновесие-цикл». На рис. 8 а представлены доверительные эллипс и полоса. Как видим, эллипс касается сепаратрисы, в то время как полоса значительно удалена. Для значения параметра  $c = 0,17396$  значения критических интенсивностей совпадают. Это должно сопровождаться одновременным касанием доверительного эллипса и сепаратрисы с одной стороны, доверительной полосы и сепаратрисы – с другой (рис. 8 б). В данном случае случайные состояния системы

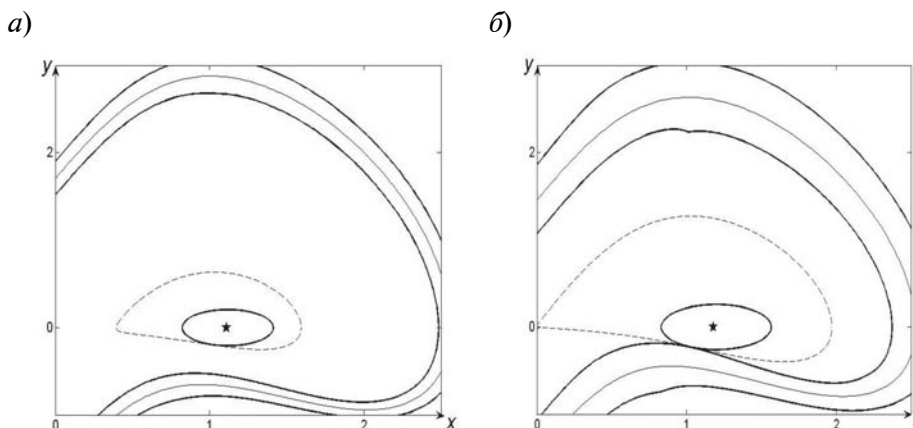


Рис. 8. Доверительные области (—), сепаратриса (- - -), цикл (—) и равновесия (\*) при  $a = 2, b = 0,25$ :  
 а – для  $c = 0,2, \epsilon = 0,057$ ; б – для  $c = 0,17396, \epsilon = 0,09$

одинаково легко осуществляют переходы с равновесия на цикл и обратно, тем самым образуя новый тип стохастического аттрактора «равновесие+цикл».

В статье кратко представлен анализ детерминированных аттракторов модели экономической динамики Гудвина. Проведены результаты исследования чувствительности стохастических аттракторов на вносимые аддитивные возмущения. С помощью метода функции стохастической чувствитель-

ности можно объяснить возможные переходы между аттракторами. Основываясь на данной функции, построены доверительные области, в которые с заданной вероятностью попадают случайные состояния системы. На основе этих данных проведен анализ критических значений интенсивностей шумов, при которых происходят переходы между бассейнами притяжения аттракторов.

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» 1.1099.2011 и поддержана грантом РФФИ №12-01-31210мол\_а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Goodwin R.M.** The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles // *Econometrica* – 1951. – № 1. – Vol. 19. – P. 1–17.
2. **Lorenz H.W.** Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. – Springer: Berlin Heidelberg New York, 1993.
3. **Lorenz H.W., Nusse H.E.** Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered // *Chaos, Solutions and Fractals* – 2002. – № 13. – P. 957–965.
4. **Jakimowicz A.** Catastrophes and chaos in business cycle theory // *Proc. of the 4th Polish Symp. on Econo- and Sociophysics, Rzeszow.* – Poland, 2009.
5. **Yoshida H., Asada T.** Dynamic analysis of policy lag in a Keynes-Goodwin model: Stability, instability, cycles and chaos // *J. of Economic Behavior and Organization.* – 2007. – № 3 – Vol. 62. – P. 441–469.
6. **Li S., Li Q., Li J., Feng J.** Chaos prediction and control of Goodwin's nonlinear accelerator model // *Nonlinear analysis: Real world applications.* – 2011. – № 12. – P. 1950–1960.
7. **Cao J., Jiang H.** Stability and Hopf bifurcation

analysis on Goodwin model with three delays // *Chaos, Solutions and Fractals.* – 2011. – № 44. – P. 613–618.

8. **Башкирцева И.А., Екатеринбург Е.Д., Рязанова Т.В., Сысолягина А.А.** Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина // *Компьютерные исследования и моделирование.* – 2013. – № 1. – Т. 5. – С. 107–118.

9. **Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979.

10. **Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.** Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A.* – 2000. – Vol. 278. – P. 126–239.

11. **Ryashko L., Bashkirtseva I.** Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // *Chaos.* – 2011. – Vol. 21. – 047514 p.

12. **Ryashko L., Bashkirtseva I.** Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey-predator plankton system // *Frontiers in Life Science.* – 2011. – Vol. 5. – P. 141–148.

#### REFERENCES

1. **Goodwin R.M.** The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles / *Econometrica* – 1951. – № 1. – Vol. 19. – P. 1–17.
2. **Lorenz H.W.** Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. – Springer: Berlin Heidelberg New York, 1993.
3. **Lorenz H.W., Nusse H.E.** Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered / *Chaos, Solutions and Fractals* – 2002. – № 13. – P. 957–965.
4. **Jakimowicz A.** Catastrophes and chaos in business cycle theory / *Proc. of the 4th Polish Symp. on Econo- and Sociophysics, Rzeszow.* – Poland, 2009.

5. **Yoshida H., Asada T.** Dynamic analysis of policy lag in a Keynes-Goodwin model: Stability, instability, cycles and chaos / *J. of Economic Behavior and Organization.* – 2007. – № 3 – Vol. 62. – P. 441–469.

6. **Li S., Li Q., Li J., Feng J.** Chaos prediction and control of Goodwin's nonlinear accelerator model / *Nonlinear analysis: Real world applications.* – 2011. – № 12. – P. 1950–1960.

7. **Cao J., Jiang H.** Stability and Hopf bifurcation analysis on Goodwin model with three delays / *Chaos, Solutions and Fractals.* – 2011. – № 44. – P. 613–618.

8. **Bashkirtseva I. A., Ekaterinchuk E.D., Rya-**





zanova T.V., Sysolyatina A.A. Matematicheskoe modelirovanie stohasticheskikh ravnovesiy I bisness-ciklov modeli Goodwin / Komputernoe issledovanie I modelirovanie. – 2013. – № 1. – Т. 5. – S. 107–118. (rus)

9. Ventcel A.D., Freindlin M.I. Fluctuazii v dinamicheskikh systemah pod deystviem malih sluchainah vozmusheniy. – Moscow: Nauka, 1979. (rus)

10. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically

forced Brusselator / Physica A. – 2000. – Vol. 278. – P. 126–239.

11. Ryashko L., Bashkirtseva I. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect / Chaos. – 2011. – Vol. 21. – 047514 p.

12. Ryashko L., Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey-predator plankton system / Frontiers in Life Science. – 2011. – Vol. 5. – P. 141–148.

---

**ЕКАТЕРИНЧУК Екатерина Дмитриевна** – магистрант кафедры математической физики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина.

620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51.

E-mail: ek.ekaterinchuk@gmail.com

**EKATERINCHUK, Ekaterina D.** *Ural Federal University.*

620083, Lenina Ave. 51, Yekaterinburg, Russia.

E-mail: Ek.Ekaterinchuk@gmail.com

**РЯЗАНОВА Татьяна Владимировна** – доцент кафедры математической физики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, кандидат физико-математических наук.

620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51.

E-mail: Tatyana.Ryazanova@usu.ru

**RYAZANOVA, Tatyana V.** *Ural Federal University.*

620083, Lenina Ave. 51, Yekaterinburg, Russia.

E-mail: Tatyana.Ryazanova@usu.ru

**РЯШКО Лев Борисович** – профессор кафедры математической физики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, доктор физико-математических наук.

620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru

**RYASHKO, Lev B.** *Ural Federal University.*

620083, Lenina Ave. 51, Yekaterinburg, Russia.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru