УДК 519.217.4

О.И. Заяц, С.В. Березин

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУГАЧЁВА–СВЕШНИКОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЛИНЕЙНЫХ В ЧЕТВЕРТЯХ ПРОСТРАНСТВА

O.I. Zayats, S.V. Berezin

ANALYSIS OF PIECEWISE LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS IN QUARTER-SPACES BY MEANS OF THE PUGACHEV–SVESHNIKOV EQUATION

Предложен аналитический метод получения распределения фазовых координат кусочно-линейных стохастических систем, линейных в четвертях пространства. Метод основан на решении уравнения Пугачёва–Свешникова для характеристической функции. Решение последнего сводится к решению параметрической краевой задачи Римана для биполуплоскостей. В качестве примера решена задача Кренделла о вычислении вероятностных характеристик перемещения незакрепленного тела, помещенного на подвижное основание, совершающее случайные колебания. Рассмотрен случай управляемого демпфера сухого трения, который включается, если скорость тела по модулю выше критической. Исследованы асимптотики моментов перемещения и вероятностные характеристики времени, в течение которого демпфер сухого трения выключен (задача Феллера о времени пребывания системы в штатном режиме).

НЕПРЕРЫВНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС; УРАВНЕНИЕ ПУГАЧЁВА–СВЕШНИКОВА; КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ БИПОЛУПЛОСКОСТЕЙ; СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА; ЗАДАЧА КРЕНДЕЛЛА; ЗАДАЧА ФЕЛЛЕРА; СУХОЕ ТРЕНИЕ.

An analytic approach is presented to obtain a probability distribution function of the state-vector of piecewise linear systems which have four domains (quarter spaces) of linearity. The approach is based on the use of the Pugachev–Sveshnikov equation for the characteristic function and its reduction to the parametric Riemann Boundary Value Problem for bi-half planes. The Crandall's problem for the controlled dry friction, which is switched off when body's velocity is over a critical level, is solved as an instance of application of the derived theory. The asymptotic behavior of the displacement of a body, placed on a randomly oscillating foundation, and occupation time, while velocity is under the critical level, are explored.

CONTINUOUS MARKOV PROCESS; PUGACHEV–SVESHNIKOV EQUATION; RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR BI-HALF PLANES; STOCHASTIC MECHANICS; CRANDALL'S PROBLEM; FELLER'S PROBLEM; DRY FRICTION.

Необходимость исследования стохастических динамических систем в нелинейной постановке возникает во многих важных прикладных задачах. Встречающиеся на практике нелинейности чрезвычайно разнообразны, но большинство из них допускает кусочно-линейную аппроксимацию. Такие приближения являются одними из наиболее употребительных и повсеместно применяются в самых разнообразных приложениях: физических, механических, электротехнических, радиотехнических, финансово-экономических и многих др.

Систематическое изучение стохастических динамических систем с кусочно-линейными характеристиками началось в середине XX века. Данному кругу проблем посвящено большое количество специальных исследований. Более подробно об этом шла речь в [1]. В настоящее время сколько-нибудь общие методы, предназначенные для решения именно кусочно-линейных задач и учитывающие их специфику, практически отсутствуют. За исключением систем первого порядка инженеры и практики вынуждены довольствоваться сугубо численными алгоритмами, либо приближенными подходами типа метода статистической линеаризации (МСЛ).

Один из перспективных современных методов статистической динамики кусочно-линейных систем основан на использовании уравнения Пугачёва–Свешникова (ПС). Первоначально оно предназначалось для исследования систем, включающих нелинейности релейного типа. К этому типу относят нелинейные функции $\varphi(x)$, которые при $|x| > a$, где $a \geq 0$, совпадают со стандартной релейной нелинейностью sign x, а в остальном произвольны. Предложившие этот метод В.С. Пугачёв (при произвольном типе нелинейностей) и А.А. Свешников (при релейном их типе) имели в виду приближенное решение соответствующего уравнения и рассматривали его в качестве альтернативы МСЛ.

Между тем удалось доказать аналитическую разрешимость уравнения ПС в некотором классе систем, включающих нелинейность типа sign x. Первые результаты в этом направлении появились еще при жизни А.А. Свешникова, в конце 70-х гг. В более или менее законченном виде теория представлена в статье [2], где даны три примера аналитического решения. Первый задает распределение скорости вынужденных случайных колебаний при наличии сухого трения, а также при одновременном действии сухого и вязкого трения. Во втором примере найдено распределение абсолютной скорости незакрепленного тела, скользящего с сухим трением вдоль подвижного основания, совершающего случайные колебания. Третий пример посвящен осциллятору с вязким трением и кусочно-постоянной восстанавливающей силой.

Построено аналитическое решение задачи механики твердого тела, поставленной С. Кренделлом. В ней требуется найти распределение перемещений незакрепленного тела на подвижном, стохастически колеблющемся основании при наличии трения между телом и основанием. В работе [3] эта задача решена при сухом трении, а в [4] – при комбинации сухого и вязкого трения.

Метод уравнения ПС позволяет аналитически находить распределение длительности выбросов. С его помощью для ряда типовых процессов решена задача В. Феллера о распределении времени пребывания процесса на положительной полуоси. Общая теория изложена в статье [5], где указанная задача решена для процессов Н. Винера, Т. Кохи–Дж. Динза, Г. Уленбека–Л. Орнштейна. Аналитическое решение для винеровского процесса с постоянным сносом приведено в [6].

Выше речь шла о системах, включающих нелинейность sign x. Без существенных изменений метод распространяется и на случай нелинейности $|x|$. Это позволило, например, в работах [3, 4] найти распределение пути, проходимого при случайных колебаниях. Для двух этих типов нелинейностей (sign x и $|x|$) получено не только распределение фазовых координат динамической системы, но и более детальные ее характеристики, такие, как вероятность невыхода фазовых координат за заданные пределы [7] и спектральная плотность в установившемся режиме [8].

Как показано в последней работе [1], вся разработанная ранее для нелинейностей вида sign x и $|x|$ теория полностью сохраняет свою силу и для произвольных кусочно-линейных систем, линейных в полупространствах. Так называют динамические системы произвольного порядка n, фазовое пространство которых $\mathbb{R}^n$ делится заданной гиперплоскостью Г на два полупространства, причем в каждом из них процесс эволюции системы описывается линейными уравнениями.

В настоящей статье рассматривается более сложная модель кусочно-линейной динамической системы. Ее порядок $n \geq 2$ по-прежнему считается произвольным, но фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается заданной парой пересекающих друг друга гиперплоскостей Γ_1 и Γ_2 теперь уже на четыре части (четверти $\mathbb{R}^n$), представляющие собой области линейности этой кусочно-линейной системы. Опишем исследуемую модель подробнее.

Преобразование уравнений движения

Рассмотрим динамическую систему произвольного порядка n с фазовым вектором $\overline{U} = (U_1, \ldots, U_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. Допустим, что заданы две пересекающиеся гиперплоскости $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$. Без ущерба для общности можно считать, что эти гиперплоскости совпадают с координатными гиперплоскостями U_1 и U_2. Действительно, если в исходной постановке это условие не выполняется, то следует перейти к новой системе координат, взяв в качестве первых двух базисных векторов нормали к Γ_1 и Γ_2, а также сдвинуть начало координат в точку, принадлежащую одновременно обеим гиперплоскостям Γ_1 и Γ_2. После указанных преобразований уравнения гиперплоскостей будут иметь вид

$$\Gamma_i = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_i = 0\}, \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

Уравнение движения системы примем в виде

$$\frac{d}{dt}\overline{U} = \vec{\varphi}(t, \overline{U}) + \Psi(t, \overline{U})\vec{\xi}, \tag{2}$$

$$\overline{U}(0) = \overline{U}_0, \tag{3}$$

где $\overline{U}$ обозначает фазовый вектор; $\overline{U}_0$ – его начальное значение; $\vec{\xi}$ – стандартный (центрированный, с единичной интенсивностью) гауссовский белый шум. Вектор-функция $\vec{\varphi}$ является линейной, а матрица интенсивностей шумов Ψ – постоянной в каждой из координатных четвертей пространства

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 > 0, y_2 > 0\},\\
\Omega_{12} &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 > 0, y_2 < 0\},\\
\Omega_{21} &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 < 0, y_2 > 0\},\\
\Omega_{22} &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_1 < 0, y_2 < 0\},
\end{aligned} \tag{4}$$

причем по определению

$$\vec{\varphi}(\tau, \vec{y}) = -C^{(i,j)}(\tau)\vec{y} - \vec{d}^{(i,j)}(\tau), \quad \vec{y} \in \Omega_{ij}, \tag{5}$$

$$\Psi(\tau, \vec{y}) = \sqrt{2}H^{(i,j)}(\tau), \quad \vec{y} \in \Omega_{ij} \tag{6}$$

для всех $i = 1, 2,\ j = 1, 2.$ Для определенности, на особых гиперплоскостях функции $\vec{\varphi}$ и Ψ доопределяются как полусумма предельных значений, соответствующих функций на верхнем и нижнем берегах Γ_i.

Далее преобразуем выражения (4) и (5) с помощью приема, описанного в [1]: выразим функции, линейные в четвертях пространства $\Omega_{i,j}$, через произведение функций, линейных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, на функции знака числа $\operatorname{sign} x$. Для этого вначале введем индикаторные функции квадрантов декартовой системы координат на плоскости:

$$\chi_{ij}(y_1, y_2) = \frac{1 \pm \operatorname{sign} y_1}{2} \cdot \frac{1 \pm \operatorname{sign} y_2}{2}, \quad (i = 1, 2,\ j = 1, 2), \tag{7}$$

где знак в первой скобке определяется индексом i, а знак во второй скобке – индексом j, причем для индексов, равных единице, выбирается знак плюс, а для равных двойке – минус.

Глобальные представления функций $\vec{\varphi}$ и Ψ с помощью индикаторов (7) выражаются через локальные представления (4) и (5) по формулам:

$$\vec{\varphi}(t, \vec{y}) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(C^{(i,j)}(\tau)\vec{y} + \vec{d}^{(i,j)}(\tau))\chi_{ij}(y_1, y_2), \tag{8}$$

$$\Psi(t, \vec{y}) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}H^{(i,j)}(\tau)\chi_{ij}(y_1, y_2). \tag{9}$$

Теперь уравнения движения можно переписать в стандартном виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\overline{U} + (C_0 + C_1\operatorname{sign}U_1 + C_2\operatorname{sign}U_2 + \\
&+C_{12}\operatorname{sign}U_1\operatorname{sign}U_2)\overline{U} + \vec{d}_0 + \vec{d}_1\operatorname{sign}U_1 + \\
&+\vec{d}_2\operatorname{sign}U_2 + \vec{d}_{12}\operatorname{sign}U_1\operatorname{sign}U_2 = \sqrt{2}(H_0 + \\
&+H_1\operatorname{sign}U_1 + H_2\operatorname{sign}U_2 + H_{12}\operatorname{sign}U_1\operatorname{sign}U_2)\vec{\xi},
\end{aligned} \tag{10}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{C^{(1,1)} + C^{(1,2)} + C^{(2,1)} + C^{(2,2)}}{4},\\
C_1 &= \frac{C^{(1,1)} + C^{(1,2)} - C^{(2,1)} - C^{(2,2)}}{4},\\
C_2 &= \frac{C^{(1,1)} - C^{(1,2)} + C^{(2,1)} - C^{(2,2)}}{4},\\
C_{12} &= \frac{C^{(1,1)} - C^{(1,2)} - C^{(2,1)} + C^{(2,2)}}{4},\\
\vec{d}_0 &= \frac{\vec{d}^{(1,1)} + \vec{d}^{(1,2)} + \vec{d}^{(2,1)} + \vec{d}^{(2,2)}}{4},\\
\vec{d}_1 &= \frac{\vec{d}^{(1,1)} + \vec{d}^{(1,2)} - \vec{d}^{(2,1)} - \vec{d}^{(2,2)}}{4},\\
\vec{d}_2 &= \frac{\vec{d}^{(1,1)} - \vec{d}^{(1,2)} + \vec{d}^{(2,1)} - \vec{d}^{(2,2)}}{4},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\vec{d}_{12} = \frac{\vec{d}^{(1,1)} - \vec{d}^{(1,2)} - \vec{d}^{(2,1)} + \vec{d}^{(2,2)}}{4},$$
$$H_0 = \frac{H^{(1,1)} + H^{(1,2)} + H^{(2,1)} + H^{(2,2)}}{4},$$
$$H_1 = \frac{H^{(1,1)} + H^{(1,2)} - H^{(2,1)} - H^{(2,2)}}{4}, \quad (11)$$
$$H_2 = \frac{H^{(1,1)} - H^{(1,2)} + H^{(2,1)} - H^{(2,2)}}{4},$$
$$H_{12} = \frac{H^{(1,1)} - H^{(1,2)} - H^{(2,1)} + H^{(2,2)}}{4}.$$

Таким образом, в уравнениях движения присутствуют четыре группы слагаемых: первая аналогична линейному уравнению, вторая содержит разрывные множители $\operatorname{sign} U_1$ и $\operatorname{sign} U_2$, а третья – произведение этих множителей. Все эти выражения войдут в вектор сноса и матрицу диффузии непрерывного марковского процесса, определяемого (10). При записи уравнения Пугачёва первые две группы слагаемых обрабатываются аналогично [1], а последнее, третье слагаемое требует более детального рассмотрения.

Уравнение Пугачёва–Свешникова

По аналогии со статьей [1] вначале запишем уравнение Пугачёва для характеристической функции процесса $\vec{U}$, связанной с плотностью $f(\vec{y};\tau)$ формулой преобразования Фурье:

$$E(\vec{z};\tau) = M_y[e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{U}(\tau)}] = \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{y}} f(\vec{y};\tau)dV_y, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = M[\Phi(\vec{z} \mid \vec{U}(\tau),\tau)e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{U}(\tau)}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{y}}\, \Phi(\vec{z} \mid \vec{y},\tau) f(\vec{y};\tau)dV_y, \quad (13)$$

где dV_y – элемент объема $\mathbb{R}^n$, а Φ обозначает *функцию Пугачёва*

$$\Phi(\vec{z} \mid \vec{y},\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau} M[e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\Delta\vec{U}} - 1 \mid \vec{U}(\tau) = \vec{y}]. \quad (14)$$

Последняя выражается в виде суммы линейной и квадратичной форм относительно компонент вектора $\vec{z}$

$$\Phi(\vec{z} \mid \vec{y},\tau) = i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{a}(\tau,\vec{y}) - \frac{1}{2}\vec{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\tau,\vec{y})\vec{z}, \quad (15)$$

причем коэффициенты линейной формы являются компонентами вектора сноса $\vec{a}$, а квадратичной – элементами матрицы диффузии $\mathbf{B}$. Решение уравнения (13) ищется при начальном условии

$$E\,|_{\tau=0} = E_0(\vec{z}). \quad (16)$$

Подставив (15) в (13), принимая во внимание выражение (11) и проведя интегрирование, получим в правой части (13) три типа слагаемых. Первый выражается через характеристическую функцию, второй – через одномерные сингулярные интегралы с ядром Коши, третий – через двумерный сингулярный интеграл с ядром Коши. Двумерные интегралы типа Коши возникают в связи с формулой (см. [9])

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{y}} \operatorname{sign} y_j \, \operatorname{sign} y_l \, f(\vec{y})dV_y = -\frac{1}{\pi^2} v.p.\iint\limits_{-\infty} \frac{E\,|_{z_j=s_1, z_l=s_2}}{(s_1 - z_j)(s_2 - z_l)} ds_1 ds_2. \quad (17)$$

В итоге получим уравнение Пугачёва–Свешникова:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C_0 \nabla_{\vec{z}} E + (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_0 + \vec{z}^{\mathrm{T}} B_0 \vec{z})E - \\
&-i\left[\vec{z}^{\mathrm{T}} C_1 \nabla_{\vec{z}}\left(\frac{1}{\pi} v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E\,|_{z_1=s}}{s - z_1}ds\right) + \right.\\
&\left.+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_1 + \vec{z}^{\mathrm{T}} B_1 \vec{z})\left(\frac{1}{\pi} v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E\,|_{z_1=s}}{s - z_1}ds\right)\right] - \\
&-i\left[\vec{z}^{\mathrm{T}} C_2 \nabla_{\vec{z}}\left(\frac{1}{\pi} v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E\,|_{z_2=s}}{s - z_2}ds\right) + \right.\\
&\left.+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_2 + \vec{z}^{\mathrm{T}} B_2 \vec{z})\left(\frac{1}{\pi} v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E\,|_{z_2=s}}{s - z_2}ds\right)\right] - \\
&-\left[\vec{z}^{\mathrm{T}} C_{12} \nabla_{\vec{z}}\left(\frac{1}{\pi^2} v.p.\iint\limits_{-\infty}\frac{E\,|_{z_1=s_1, z_2=s_2}}{(s_1 - z_1)(s_2 - z_2)}ds_1 ds_2\right) + \right.\\
&+(i\vec{z}^{T}\vec{d}_{12} + \vec{z}^{T} B_{12}\vec{z})\times \\
&\left.\times\left(\frac{1}{\pi^2} v.p.\iint\limits_{-\infty}\frac{E\,|_{z_1=s_1, z_2=s_2}}{(s_1 - z_1)(s_2 - z_2)}ds_1 ds_2\right)\right] = 0,
\end{aligned} \quad (18)$$

где

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{H^{(1,1)}H^{(1,1)\mathrm{T}} + H^{(1,2)}H^{(1,2)\mathrm{T}} + H^{(2,1)}H^{(2,1)\mathrm{T}} + H^{(2,2)}H^{(2,2)\mathrm{T}}}{4},\\
B_1 &= \frac{H^{(1,1)}H^{(1,1)\mathrm{T}} + H^{(1,2)}H^{(1,2)\mathrm{T}} - H^{(2,1)}H^{(2,1)\mathrm{T}} - H^{(2,2)}H^{(2,2)\mathrm{T}}}{4},\\
B_2 &= \frac{H^{(1,1)}H^{(1,1)\mathrm{T}} - H^{(1,2)}H^{(1,2)\mathrm{T}} + H^{(2,1)}H^{(2,1)\mathrm{T}} - H^{(2,2)}H^{(2,2)\mathrm{T}}}{4},\\
B_{12} &= \frac{H^{(1,1)}H^{(1,1)\mathrm{T}} - H^{(1,2)}H^{(1,2)\mathrm{T}} - H^{(2,1)}H^{(2,1)\mathrm{T}} + H^{(2,2)}H^{(2,2)\mathrm{T}}}{4}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Для большей краткости и наглядности введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_{12}(\vec{z};\tau) &= \frac{1}{\pi^2}\, v.p.\iint\limits_{-\infty} \frac{E\,|_{z_1=s_1,z_2=s_2}}{(s_1-z_1)(s_2-z_2)}\,ds_1ds_2,\\
\widehat{E}_j(\vec{z};\tau) &= \frac{1}{\pi}\, v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E\,|_{z_j=s}}{s-z_j}\,ds,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

для $j = 1, 2$, тогда уравнение (18) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}}C_0\nabla_{\vec{z}}E + (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_0 + \vec{z}^{\mathrm{T}}B_0\vec{z})E -\\
&- i(\vec{z}^{\mathrm{T}}C_1\nabla_{\vec{z}}\widehat{E}_1 + (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_1 + \vec{z}^{\mathrm{T}}B_1\vec{z})\widehat{E}_1) -\\
&- i(\vec{z}^{\mathrm{T}}C_2\nabla_{\vec{z}}\widehat{E}_2 + (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_2 + \vec{z}^{\mathrm{T}}B_2\vec{z})\widehat{E}_2) -\\
&- (\vec{z}^{\mathrm{T}}C_{12}\nabla_{\vec{z}}\widehat{E}_{12} + (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}_{12} + \vec{z}^{\mathrm{T}}B_{12}\vec{z})\widehat{E}_{12}) = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Основная идея метода решения, как и в работе [1], основывается на сведении уравнения (21) к краевой задаче Римана теории функций комплексного переменного, однако в отличии от указанной работы, теперь эта задача будет двумерной, а ставиться будет для биполуплоскостей.

Сведение к краевой задаче Римана

Метод сведения сингулярного уравнения к краевой задаче Римана достаточно подробно описан в [1], поэтому мы сконцентрируем внимание только на специфических чертах, присущих сингулярным уравнениям, содержащим *двумерные* сингулярные интегралы с ядром Коши.

Введем в рассмотрение двукратный интеграл типа Коши с плотностью E:

$$
\begin{aligned}
&F(\zeta_1,\zeta_2;\vec{z}',\tau) =\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_{-\infty} \frac{E(\vec{z};\tau)}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}\,dz_1dz_2,\\
&(\mathrm{Im}\ \zeta_1 \neq 0,\ \mathrm{Im}\ \zeta_2 \neq 0),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $\vec{z}' = (z_3, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}$. Этот интеграл представляет собой кусочно-аналитическую функцию, которая аналитична по z_1 и z_2 в каждой из биполуплоскостей:

$$
D^{\pm\pm} = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im}\ z_1 \gtrless 0, \mathrm{Im}\ z_2 \gtrless 0\}. \tag{23}
$$

Ее предельные значения на остове $L = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Im}\, z_1 = 0, \mathrm{Im}\, z_2 = 0\}$ биполуплоскостей $D^{\pm\pm}$, определяемые равенством

$$
F^{\pm\pm}(z_1, z_2; \vec{z}', \tau) = \lim_{\substack{\zeta_1 \to z_1 \pm i0\\ \zeta_2 \to z_2 \pm i0}} F(\zeta_1, \zeta_2; \vec{z}', \tau), \tag{24}
$$

удовлетворяют двумерному варианту формул Ю.В. Сохоцкого [9]:

$$
\begin{aligned}
F^{++} - F^{+-} - F^{-+} + F^{--} &= E,\\
i(F^{++} - F^{+-} + F^{-+} - F^{--}) &= \widehat{E}_1,\\
i(F^{++} + F^{+-} - F^{-+} - F^{--}) &= \widehat{E}_2,\\
-(F^{++} + F^{+-} + F^{-+} + F^{--}) &= \widehat{E}_{12}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

В формуле (23) первый и второй знаки в $D^{\pm\pm}$ естественным образом синхронизированы с ограничениями на знак мнимой части чисел z_1 и z_2, аналогично берутся знаки в (24).

Учитывая формулы Сохоцкого (25), после технически несложных, но громоздких вычислений, уравнение (21) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F^{++}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}}C^{(1,1)}\nabla_{\vec{z}}F^{++} +\\
&+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}^{(1,1)} + \vec{z}^{\mathrm{T}}H^{(1,1)}H^{(1,1)\mathrm{T}}\vec{z})F^{++} -\\
&-\Bigg[\frac{\partial F^{+-}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}}C^{(1,2)}\nabla_{\vec{z}}F^{+-} +\\
&+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}}\vec{d}^{(1,2)} + \vec{z}^{\mathrm{T}}H^{(1,2)}H^{(1,2)\mathrm{T}}\vec{z})F^{+-}\Bigg] -
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$-\left[\frac{\partial F^{-+}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(2,1)} \nabla_{\vec{z}} F^{-+} + \right.$$
$$\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(2,1)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(2,1)} H^{(2,1)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{-+} \right] + \quad (26)$$
$$+ \frac{\partial F^{--}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(2,2)} \nabla_{\vec{z}} F^{--} +$$
$$+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(2,2)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(2,2)} H^{(2,2)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{--} = 0.$$

Начальные условия для (26) будут выражаться через распределение f_0 начального фазового вектора $\overline{U}_0$ по формулам, аналогичным [1]:

$$F^{\pm\pm}\Big|_{\tau=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{sign} y_1 \pm 1}{2} \times \times \frac{\operatorname{sign} y_2 \pm 1}{2} e^{i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{y}} f_0(\vec{y}) dV_y. \quad (27)$$

Полученная краевая задача схожа со стандартной задачей Римана для биполуплоскостей [9], поэтому за ней далее будет сохранено это традиционное наименование. Однако отличием, существенно усложняющим ее решение, является наличие градиента по $\vec{z}$ и производной по τ. Такого рода краевые задачи Римана, насколько нам известно, в литературе еще не рассматривались.

Наиболее близким из известных авторам аналогов задачи (26) является одномерная краевая задача Римана, возникающая в теории кусочно-линейных стохастических систем, линейных в полупространствах [1]. Напомним, что в указанной задаче в роли контура, на котором ставится краевое условие, выступала вещественная ось $\operatorname{Im} z_1 = 0$. Коэффициенты при самих неизвестных краевых значениях $F^{\pm}$ были квадратичны по z_1, а при их производных по z_j – линейны относительно z_1.

В задаче (26) остов L, на котором ставится краевое условие, представляет собой прямое (декартово) произведение двух вещественных осей $\operatorname{Im} z_1 = 0$ и $\operatorname{Im} z_2 = 0$, причем сохраняется квадратичность коэффициентов при $F^{\pm\pm}$, но теперь уже относительно пары аргументов z_1 и z_2, а коэффициенты при производных $\dfrac{\partial F^{\pm\pm}}{\partial z_k}$ по-прежнему линейны по тем же аргументам. Таким образом, если не принимать во внимание размерность задачи, то новая задача вполне аналогична краевым задачам [1]. Это позволяет применить описанный в [1] метод решения.

Он заключается в переходе от краевого условия к т. н. *основному уравнению*. В краевое условие [1] входила разность двух функций, аналитических, соответственно, при $\operatorname{Im} z_1 > 0$ и $\operatorname{Im} z_1 < 0$. Путем несложных рассуждений, заимствованных из [9] и основанных на применении теоремы Лиувилля, показано, что каждая из указанных двух функций есть линейная функция z_1, причем ее коэффициенты для обоих слагаемых одинаковы. Задача сводилась к их определению и допускала аналитическое решение методом [2]. В настоящей статье краевое условие (26) содержит уже четыре функции, аналитические в биполуплоскостях $D^{\pm\pm}$, определяемых (24). Все эти четыре функции, как будет показано далее, можно выразить в виде суммы двух линейных функций, каждая от одного из аргументов z_1 либо z_2 с коэффициентами, зависящими от другого из указанных аргументов, причем эти коэффициенты являются аналитическими в соответствующих полуплоскостях. Метод основного уравнения сохраняет свою силу и в этом случае, хотя теперь приходится определять неизвестные коэффициенты, при дополнительном условии их аналитичности в соответствующих полуплоскостях. Все это вносит существенное усложнение по сравнению с задачей [1].

Здесь уместно вспомнить замечание Ф.Д. Гахова о различии двумерных и одномерных задач Римана. Он считал это различие примерно таким же, как различие между дифференциальными уравнениями в частных производных и обыкновенными дифференциальными уравнениями [9]. Подчеркнем важное отличие рассматриваемой здесь задачи от задачи [1]. Нестандартность задачи [1] обусловлена только наличием производных по параметрам в краевом условии. Решение одномерной задачи Римана без этих производных хорошо известно и было найдено в общем виде Гаховым еще в середине XX века. Решение же классической задачи Римана для биполуплоскостей в общем виде в настоящее время еще не получено: оно построено лишь для некоторых частных случаев задания коэффициентов [11].

Метод основного уравнения, разумеется, также не дает самого общего вида решения, однако он эффективен для тех краевых задач, которые возникают в теории кусочно-линейных стохастических систем. Далее изложим вывод основного уравнения применительно к задаче (26).

Вначале проведем *сепарацию* левой части уравнения (26) по одному из аргументов z_1 или z_2, скажем, по z_1. Под сепарацией здесь понимается представление функции комплексного аргумента z_1 в виде разности двух функций $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$, аналитических по z_1, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, т. е. преобразование уравнения (26) к виду

$$\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^- = 0, \quad (z_1, z_2) \in L, \tag{28}$$

где, очевидно, следует принять

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^+ &= \frac{\partial F^{++}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(1,1)} \nabla_{\vec{z}} F^{++} + \\
&+ (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(1,1)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(1,1)} H^{(1,1)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{++} - \\
&- \left[\frac{\partial F^{+-}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(1,2)} \nabla_{\vec{z}} F^{+-} + \right. \\
&\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(1,2)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(1,2)} H^{(1,2)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{+-} \right], \\
\mathcal{F}^- &= \left[\frac{\partial F^{-+}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(2,1)} \nabla_{\vec{z}} F^{-+} + \right. \\
&\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(2,1)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(2,1)} H^{(2,1)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{-+} \right] - \\
&- \left[\frac{\partial F^{--}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(2,2)} \nabla_{\vec{z}} F^{--} + \right. \\
&\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(2,2)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(2,2)} H^{(2,2)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{--} \right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Далее рассмотрим на расширенной комплексной плоскости, соответствующей аргументу z_1, кусочно-аналитическую функцию $\mathcal{F}$, которая в верхней полуплоскости совпадает с $\mathcal{F}^+$, в нижней с $\mathcal{F}^-$, а на вещественной оси равняется общему значению этих двух функций:

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \mathcal{F}^+, & \operatorname{Im} z_1 > 0, \\ \mathcal{F}^-, & \operatorname{Im} z_1 < 0. \end{cases} \tag{30}$$

Так построенная функция $\mathcal{F}$ аналитична во всей плоскости комплексного переменного z_1. Используя известные асимптотики интеграла типа Коши при $z_1 \to \infty$ [9], а также тот факт, что функции (29) получаются путем умножения этого интеграла и его производных по параметрам на полиномы не выше чем второго порядка относительно z_1, заключаем, что порядок $\mathcal{F}^\pm$ по z_1, а значит и порядок «склеенной» из них функции (30) на бесконечности не выше первого. Отсюда по обобщенной теореме Лиувилля [9] выводим, что $\mathcal{F}$ линейна по z_1:

$$\mathcal{F} = G_0(z_2, \vec{z}', \tau) + z_1 G_1(z_2, \vec{z}', \tau), \tag{31}$$

где $\vec{z}'$ имеет тот же смысл, что и в (22).

Приравнивая каждую из функций (29) порознь к правой части (31), получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial F^{\pm+}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(k,1)} \nabla_{\vec{z}} F^{\pm+} + \right. \\
&\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(k,1)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(k,1)} H^{(k,1)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{\pm+} \right] - \\
&- \left[\frac{\partial F^{\pm-}}{\partial \tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(k,2)} \nabla_{\vec{z}} F^{\pm-} + \right. \\
&\left. + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(k,2)} + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(k,2)} H^{(k,2)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{\pm-} \right] = \\
&= G_0(z_2, \vec{z}', \tau) + z_1 G_1(z_2, \vec{z}', \tau),
\end{aligned} \tag{32}$$

причем значение k определяется здесь первым индексом при $F^{\pm\pm}$: в случае индекса плюс берется $k = 1$, иначе $k = 2$.

Далее используем прием, предложенный в [9]. Вначале сепарируем функции G_j по аргументу z_2:

$$G_j(z_2, \vec{z}', \tau) = G_j^+(z_2, \vec{z}', \tau) - G_j^-(z_2, \vec{z}', \tau), \quad (j = 0,1). \tag{33}$$

Затем подставляем (33) в (32), при этом слагаемые, включающие G_j^+, добавляем к первой квадратной скобке (32), а члены с G_j^- — ко второй. В результате получаем разность двух слагаемых, просепарированную по z_2, напоминающую (28). Повторяя рассуждения, последовавшие за получением (28) и приведшие затем к выводу (32), приходим в итоге к упомянутым выше *основным уравнениям*:

$$\frac{\partial F^{\pm\pm}}{\partial\tau} + \vec{z}^{\mathrm{T}} C^{(j,l)} \nabla_{\vec{z}} F^{\pm\pm} + (i\vec{z}^{\mathrm{T}} \vec{d}^{(j,l)} + \\ + \vec{z}^{\mathrm{T}} H^{(j,l)} H^{(j,l)\mathrm{T}} \vec{z}) F^{\pm\pm} = G_0^{\pm}(z_2, \vec{z}', \tau) + \\ + z_1 G_1^{\pm}(z_2, \vec{z}', \tau) + H_0^{\pm}(z_1, \vec{z}', \tau) + H_1^{\pm}(z_1, \vec{z}', \tau) z_2. \quad (34)$$

Формула (34) представляет сокращенную форму записи *четырех* уравнений для различных краевых значений $F^{\pm\pm}$, в которых первый и второй верхний индекс при символе краевого значения интеграла типа Коши может выбираться произвольно, причем первый индекс совпадает с индексом при G_j, а второй – при H_l. Числовые индексы j и l естественным образом синхронизированы с первым и вторым индексами $F^{\pm\pm}$ по правилу, аналогичному правилу выбора индекса k в (32). Относительно компонент $\vec{z}'$ правая часть (34) является целой функцией по соображениям, аналогичным [2].

Отметим, что индексы, которыми снабжены $G_j^{\pm}$ и $H_l^{\pm}$, точно так же, как и индексы $F^{\pm\pm}$, указывают на аналитичность в соответствующей полуплоскости z_1 и z_2. Правая часть каждого из четырех основных уравнений (34) содержит по четыре слагаемых, которые выбираются для каждого $F^{\pm\pm}$ так, чтобы не противоречить требованию аналитичности $F^{\pm\pm}$ в соответствующей биполуплоскости $D^{\pm\pm}$.

Уравнения (34) напоминают основные уравнения, возникающие при рассмотрении кусочно-линейных систем, линейных в полупространствах [1], однако по сравнению с этими последними уравнениями они оказываются более сложными, причем усложнение весьма существенно. Во-первых, число неизвестных функций увеличилось с двух до восьми. Во-вторых, правая часть уже не является линейной функцией всего лишь одного аргумента z_1, а представляет сумму двух линейных функций от каждого из аргументов z_1 и z_2 с коэффициентами, зависящими от другого аргумента. Наконец, в-третьих, и это самое главное, на коэффициенты указанных линейных функций накладываются дополнительные требования аналитичности в соответствующих полуплоскостях z_1 и z_2.

Таким образом, решение уравнения Пугачёва–Свешникова (21) свелось к решению некоторой обратной задачи для уравнения (34). Она заключается в нахождении таких восьми функций $G_j^{\pm}, H_l^{\pm}$ в правых частях этих уравнений, которые бы обеспечивали аналитичность четырех краевых значений $F^{\pm\pm}$ в соответствующих биполуплоскостях $D^{\pm\pm}$. В отличие от случая [2], когда поиск неизвестных в основных уравнениях удалось свести к решению сравнительно простой системы линейных алгебраических уравнений (для систем нулевого и первого типа), рассматриваемая сейчас задача, вообще говоря, приводит к необходимости решения некоторой системы функциональных уравнений специального вида.

Далее рассмотрим пример. Для простоты ограничимся пока случаем кусочно-линейной системы, которая в каждой из четвертей пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит к нулевому типу [2].

Пример. Фрикционное торможение незакрепленного тела при наличии управляемого демпфера сухого трения

Плоское горизонтальное основание совершает случайные продольные колебания. Ускорение основания моделируется процессом белого шума заданной интенсивности h. Сверху на основании помещено незакрепленное тело массы m. Трение между ним и основанием пренебрежимо мало. Допустим, что нормальный (штатный) режим работы системы реализуется, когда скорость тела V относительно основания по модулю не превосходит заданного значения $v_{\max}$. При $|V| > v_{\max}$ возникает аварийный (нештатный) режим, в котором система частично утрачивает свою работоспособность.

Чтобы избежать таких нештатных ситуаций, тело притормаживается с помощью демпфера сухого трения, который включается при $|V| > v_{\max}$ и выдает постоянную силу сопротивления P, направленную навстречу движению. Наиболее важной характеристикой такой системы является время, в течение которого система работает в штатном режиме. Задача определения вероятностных характеристик этого времени является типовой задачей теории марковских процессов и известна под названием «задачи о времени пребывания». Соответственно, время работы в нештатном режиме можно трактовать как длительность выбросов V за пределы дозволенной области. Метод расчета длительности выбросов марковского процесса, основанный на применении уравнения Пугачёва–Свешникова, изложен в работе [5]. В рассматриваемом примере требуется изучить влияние параметров управления движением тела $v_{\max}$ и P на закон распределения времени T работы системы в штатном режиме, а также на моментные характеристики этого времени.

Уравнение движения такой системы имеет вид

$$m\dot{V} = -P\varphi(V) + mh\xi, \quad V(0) = V_0, \quad (35)$$

где V_0 – начальная скорость тела, а φ – релейная нелинейность с зоной нечувствительности

$$\varphi(v) = \begin{cases} \operatorname{sign} v, & \text{если } |v| > v_{\max} \\ 0, & \text{если } |v| < v_{\max} \end{cases}. \quad (36)$$

Тогда время, в течение которого система находится в штатном режиме, подчиняется уравнению

$$\begin{gathered} \dot{T} = \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(V + v_{\max}) - \operatorname{sign}(V - v_{\max})), \\ T(0) = 0. \end{gathered} \quad (37)$$

В безразмерных переменных

$$\begin{gathered} U = \frac{P}{mh^2}V, \ \tau = \frac{P^2}{2m^2h^2}t, \\ \Theta = \frac{P^2}{2m^2h^2}T, \ a = \frac{P}{mh^2}v_{\max} \end{gathered} \quad (38)$$

уравнения (35) и (37) преобразуются к форме

$$\begin{gathered} \dot{U} = -\operatorname{sign}(U + a) - \operatorname{sign}(U - a) + \sqrt{2}\xi, \\ \dot{\Theta} = (\operatorname{sign}(U + a) - \operatorname{sign}(U - a)) / 2. \end{gathered} \quad (39)$$

Далее будем считать, что движение начинается из состояния покоя, так что $U(0) = 0$ и $\Theta(0) = 0$.

Если бы фрикционный демпфер не выключался при $|V| < v_{\max}$, а действовал бы постоянно, что эквивалентно $v_{\max} = 0$, то тогда процесс изменения скорости (35) совпал бы с процессом Кохи–Динза [12]. При этом закон распределения скорости имел бы острый максимум вблизи начала координат. За счет выбора управляющих параметров $v_{\max}$ и P можно изменить качественный вид этого закона, а также форму закона распределения T.

Кусочно-линейная система, описываемая уравнениями (39), вообще говоря, непосредственно не относится ни к системам, линейным в полупространствах, разобранным в [1], ни к системам, линейным в четвертях пространства, изучаемым в настоящей статье, однако она может быть легко приведена к последним с помощью стандартного приема, заключающегося в расширении фазового пространства. Введем трехмерный процесс $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)^{\mathrm{T}}$ с компонентами

$$U_1 = U + a, \ U_2 = U - a, \ U_3 = \Theta. \quad (40)$$

Последний описывается системой уравнений

$$\begin{gathered} \dot{U}_1 = -\operatorname{sign} U_1 - \operatorname{sign} U_2 + \sqrt{2}\xi, \\ \dot{U}_2 = -\operatorname{sign} U_1 - \operatorname{sign} U_2 + \sqrt{2}\xi, \\ \dot{U}_3 = (\operatorname{sign} U_1 - \operatorname{sign} U_2) / 2, \end{gathered} \quad (41)$$

$$U_1(0) = a, \ U_2(0) = -a, \ U_3(0) = 0, \quad (42)$$

которая, очевидно, уже является частным случаем системы (10).

Для начала будем интересоваться только первыми двумя компонентами процесса $\vec{U}$, что соответствует системе из двух первых уравнений (41), определяющих усеченный процесс $\vec{U}^* = (U_1, U_2)^{\mathrm{T}}$. Для такой системы матричные коэффициенты

$$C^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ H^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

одинаковы для всех четвертей пространства (4), а векторные коэффициенты таковы:

$$\begin{gathered} \vec{d}^{(1,1)} = -\vec{d}^{(2,2)} = (2, 2)^{\mathrm{T}}, \\ \vec{d}^{(1,2)} = \vec{d}^{(2,1)} = (0, 0)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \quad (44)$$

Уравнение Пугачёва–Свешникова (21)

при таком задании коэффициентов примет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + (z_1 + z_2)^2 E + (z_1 + z_2)(\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2) = 0, \quad (45)$$

где $\widehat{E}_1$ и $\widehat{E}_2$ обозначают одномерные преобразования Гильберта от E вида (20), и должно решаться при начальном условии

$$E\big|_{\tau=0} = e^{ia(z_1 - z_2)}. \quad (46)$$

В соответствии с общей теорией приходим к параметрической краевой задаче Римана:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^{++}}{\partial \tau} + ((z_1 + z_2)^2 + 2i(z_1 + z_2))F^{++} - \\ -\left[\frac{\partial F^{+-}}{\partial \tau} + (z_1 + z_2)^2 F^{+-}\right] - \\ -\left[\frac{\partial F^{-+}}{\partial \tau} + (z_1 + z_2)^2 F^{-+}\right] + \\ +\frac{\partial F^{--}}{\partial \tau} + ((z_1 + z_2)^2 - 2i(z_1 + z_2))F^{--} = 0\end{gathered} \quad (47)$$

при начальных условиях по параметру τ

$$\begin{gathered}F^{++}\big|_{\tau=0} = F^{-+}\big|_{\tau=0} = \\ = F^{--}\big|_{\tau=0} = 0,\ F^{+-}\big|_{\tau=0} = e^{ia(z_1 - z_2)}.\end{gathered} \quad (48)$$

Экспонента (46) целиком вошла в начальное условие для F^{+-}, т. к. при $a > 0$ она аналитична в расширенной биполуплоскости D^{+-}.

Переходя в краевом условии (47) к изображениям по Лапласу и осуществляя сепарацию изображений краевых значений по биполуплоскостям $D^{\pm\pm}$ так, как это было описано выше, получаем следующую систему основных уравнений в изображениях:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{++} &= \frac{\tilde{G}_0^{+}(z_2; p) + z_1\tilde{G}_1^{+}(z_2; p) + \tilde{H}_0^{+}(z_1; p) + z_2\tilde{H}_1^{+}(z_1; p)}{(z_1 + z_2)^2 + 2i(z_1 + z_2) + p}, \\
\tilde{F}^{+-} &= \frac{\tilde{G}_0^{-}(z_2; p) + z_1\tilde{G}_1^{-}(z_2; p) + \tilde{H}_0^{+}(z_1; p) + z_2\tilde{H}_1^{+}(z_1; p) - e^{ia(z_1 - z_2)}}{(z_1 + z_2)^2 + p}, \\
\tilde{F}^{-+} &= \frac{\tilde{G}_0^{+}(z_2; p) + z_1\tilde{G}_1^{+}(z_2; p) + \tilde{H}_0^{-}(z_1; p) + z_2\tilde{H}_1^{-}(z_1; p)}{(z_1 + z_2)^2 + p}, \\
\tilde{F}^{--} &= \frac{\tilde{G}_0^{-}(z_2; p) + z_1\tilde{G}_1^{-}(z_2; p) + \tilde{H}_0^{-}(z_1; p) + z_2\tilde{H}_1^{-}(z_1; p)}{(z_1 + z_2)^2 - 2i(z_1 + z_2) + p},
\end{aligned} \quad (49)$$

где, напомним, $\operatorname{Re} p > 0$, а верхние индексы при $\tilde{G}_j^{\pm}$ и $\tilde{H}_l^{\pm}$ указывают на аналитичность этих функций по первому аргументу в соответствующей полуплоскости.

Насколько известно нам, метод решения краевых задач Римана для биполуплоскостей, использующий основное уравнение, в литературе ранее не рассматривался. Соответственно, малоизучены и те математические задачи, которые возникают в ходе его реализации. Поэтому поиск неизвестных функций в (49) необходимо описать подробнее.

Обратимся к первому уравнению (49). Для аналитичности $\tilde{F}^{++}$ в D^{++} необходимо, чтобы числитель $\tilde{F}^{++}$ обращался в нуль на той части комплексной гиперповерхности S_{11} определяемой уравнением

$$(z_1 + z_2)^2 + 2i(z_1 + z_2) + p = 0, \quad (50)$$

которая содержится в D^{++}.

Изучим подробнее поверхность S_{11}. Разрешив ее уравнение относительно одной из переменных, скажем, z_1, получим два варианта решения:

$$z_1 = -z_2 - i(1 \pm \sqrt{1 + p}), \quad (51)$$

из которых нужно сохранить только вариант со знаком минус перед радикалом, т. к. только для него $(z_1, z_2) \in D^{++}$. Таким образом,

$$z_1 = -z_2 + w^{+}, \quad (52)$$

где $w^{+} = i(\sqrt{1 + p} - 1)$, причем $\operatorname{Im} w^{+} > 0$ при всех $\operatorname{Re} p > 0$.

Вернемся к изучению аналитичности $\tilde{F}^{++}$. Для того чтобы числитель $\tilde{F}^{++}$ обратился в нуль на S_{11}, необходимо и достаточно выполнения функционального уравнения

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_0^+(z_2;p)+(-z_2+w^+)\tilde{G}_1^+(z_2;p)+\\&+\tilde{H}_0^+(-z_2+w^+;p)+z_2\tilde{H}_1^+(-z_2+w^+;p)=0\end{aligned}\tag{53}$$

для всех z_2, при которых $(z_1, z_2)\in D^{++}$. Учитывая линейную связь (52) между z_2 и z_2 на S_{11}, получим, что уравнение (53) выполняется всюду в полосе $0\le \operatorname{Im} z_2 \le \operatorname{Im} w^+$.

Весьма существенно, что указанное уравнение сохраняет силу при $\operatorname{Im} z_2 = 0$, т. е. на всей вещественной оси плоскости комплексного переменного z_2. При $\operatorname{Im} z_2 = 0$ первые два слагаемых в (53) представляют предельные значения на вещественной оси функций, аналитических в верхней полуплоскости, а последние два (благодаря появлению знака минус перед z_2 под аргументом $\tilde{H}_l^+$) – предельные значения функций, аналитических в нижней полуплоскости. Следовательно, уравнение (53) задает некоторую краевую задачу Римана для полуплоскостей.

Подобного рода задачи подробно разобраны в [1]. Если учтем асимптотику на бесконечности двумерного интеграла типа Коши и проследим вытекающую из нее асимптотику функций $\tilde{G}_j^\pm$ и $\tilde{H}_l^\pm$, после чего применим к решению (53) метод сепарации, то получим следующий аналог основного уравнения, отвечающий задаче (53):

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_0^+(z_2;p)+(-z_2+w^+)\tilde{G}_1^+(z_2;p)=\\&\qquad=g_0(p)+g_1(p)z_2,\\&\tilde{H}_0^+(-z_2+w^+;p)+z_2\tilde{H}_1^+(-z_2+w^+;p)=\\&\qquad=-g_0(p)-g_1(p)z_2,\end{aligned}\tag{54}$$

причем уравнения (54) сохраняют силу для любых z_2 из верхней и нижней полуплоскостей соответственно.

Каждое из уравнений (54) задает линейную связь между парой функций $\tilde{G}_j^+$, либо $\tilde{H}_l^+$ (при $j=0,1;\ l=0,1$), позволяющую выразить одну функцию каждой из пар через другую. Условимся исключить из выражений $\tilde{F}^{\pm\pm}$ функции $\tilde{G}_0^+$ и $\tilde{H}_0^+$, сохранив $\tilde{G}_1^+$ и $\tilde{H}_1^+$. Коэффициенты g_0 и g_1 в результирующее выражение для $F^{\pm\pm}$ не войдут, и их вычисление оставим в стороне. Отметим, что второе уравнение (54) удобно заменить на эквивалентное ему уравнение:

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_0^+(z_1;p)+(-z_1+w^+)\tilde{H}_1^+(z_1;p)=\\&\qquad=-g_0(p)-g_1(p)(-z_1+w^+),\end{aligned}\tag{55}$$

получаемое из (54) заменой z_2 через z_1 согласно (52).

Далее займемся последним уравнением (49), дающим выражение $\tilde{F}^{--}$. Знаменатель $\tilde{F}^{--}$ обращается в нуль на гиперповерхности S_{22}, уравнение которой отличается от (50) только знаком минус перед второй скобкой. Анализ вида части поверхности S_{22}, лежащей в D^{--}, приводит к равенству

$$z_1=-z_2-w^+,\tag{56}$$

заменяющему аналогичную связь (52) для поверхности S_{11}. Внося очевидные изменения в последующие рассуждения, приходим к следующим уравнениям, обеспечивающим аналитичность $\tilde{F}^{--}$ в D^{--}:

$$\begin{aligned}&\tilde{G}_0^-(z_2;p)-(z_2+w^+)\tilde{G}_1^-(z_2;p)=\\&\qquad=h_0(p)+h_1(p)z_2,\\&\tilde{H}_0^-(z_1;p)-(z_1+w^+)\tilde{H}_1^-(z_1;p)=\\&\qquad=-h_0(p)-h_1(p)(z_1+w^+),\end{aligned}\tag{57}$$

причем второе уравнение дается уже в преобразованном виде, аналогичном (55). С помощью (57) исключаем из выражений $\tilde{F}^{\pm\pm}$ функции $\tilde{G}_0^-$ и $\tilde{H}_0^-$.

Приведем промежуточный вид уравнений, в которых сохранены только функции $\tilde{G}_1^\pm$ и $\tilde{H}_1^\pm$:

$$\begin{aligned}&\tilde{F}^{++}=\frac{\tilde{G}_1^+(z_2;p)+\tilde{H}_1^+(z_1;p)}{z_1+z_2+i(1+\sqrt{1+p})},\\&\tilde{F}^{+-}=\frac{(z_1+z_2+w^+)\tilde{G}_1^-(z_2;p)+(z_1+z_2-w^+)\tilde{H}_1^+(z_1;p)-e^{ia(z_1-z_2)}}{(z_1+z_2)^2+p},\\&\tilde{F}^{-+}=\frac{(z_1+z_2-w^+)\tilde{G}_1^+(z_2;p)+(z_1+z_2+w^+)\tilde{H}_1^-(z_1;p)}{(z_1+z_2)^2+p},\end{aligned}\tag{58}$$

$$\tilde{F}^{--} = \frac{\tilde{G}_1^-(z_2;p) + \tilde{H}_1^-(z_1;p)}{z_1 + z_2 - i(1+\sqrt{1+p})}. \tag{58}$$

Функции $\tilde{F}^{++}$ и $\tilde{F}^{--}$ здесь уже приведены к надлежащему виду, обеспечивающему их аналитичность, соответственно, в D^{++} и D^{--}.

Аналогичному преобразованию надо подвергнуть и две оставшиеся функции. Их знаменатели совпадают, так что особые гиперповерхности S_{12} и S_{21} будут задаваться одним уравнением:

$$(z_1 + z_2)^2 + p = 0, \tag{59}$$

решение которого относительно z_1 таково:

$$z_1 = -z_2 \pm i\sqrt{p}. \tag{60}$$

Здесь, в отличие от предыдущей ситуации, знак перед радикалом в (60) может быть как плюс, так и минус, и оба этих варианта нужно учесть при изучении аналитичности как $\tilde{F}^{+-}$, так и $\tilde{F}^{-+}$.

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем условия аналитичности $\tilde{F}^{-+}$ в виде:

$$\begin{gathered}(\pm i\sqrt{p} - w^+)\tilde{G}_1^+(z_2;p) + \\ + (\pm i\sqrt{p} + w^+)\tilde{H}_1^-(-z_2 \pm i\sqrt{p};p) = 0,\end{gathered} \tag{61}$$

причем, легко видеть, что $(z_1, z_2) \in D^{-+}$, если $\operatorname{Im} z_2 \geq \operatorname{Re}\sqrt{p} > 0$. Уравнение (61) представляет собой сокращенную форму записи двух уравнений, соответствующих разному знаку при $i\sqrt{p}$. Если из этих двух уравнений исключить $\tilde{G}_1^+$, получим однородное конечно-разностное уравнение относительно $\tilde{H}_1^-$:

$$\begin{gathered}(i\sqrt{p} + w^+)^2\,\tilde{H}_1^-(-z_2 + i\sqrt{p};p) - \\ - (-i\sqrt{p} + w^+)^2\,\tilde{H}_1^-(-z_2 - i\sqrt{p};p) = 0.\end{gathered} \tag{62}$$

Решением последнего является $\tilde{H}_1^- = 0$, тогда из (61) следует, что и $\tilde{G}_1^+ = 0$.

Аналогичные рассуждения применительно к функции $\tilde{F}^{+-}$ приводят уже к неоднородному разностному уравнению для $\tilde{H}_1^+$:

$$\begin{gathered}(i\sqrt{p} - w^+)^2\,\tilde{H}_1^+(-z_2 + i\sqrt{p};p) - \\ - (i\sqrt{p} + w^+)^2\,\tilde{H}_1^+(-z_2 - i\sqrt{p};p) = \\ = (i\sqrt{p} - w^+)e^{-2aiz_2 - a\sqrt{p}} + (i\sqrt{p} + w^+)e^{-2aiz_2 + a\sqrt{p}},\end{gathered} \tag{63}$$

решение которого будем искать в виде

$$\tilde{H}_1^+(z_1;p) = A(p)e^{2aiz_1}. \tag{64}$$

Подстановка (64) в (63) превращает последнее в тождество, если принять

$$A(p) = \frac{1}{(i\sqrt{p} - w^+)e^{-a\sqrt{p}} - (i\sqrt{p} + w^+)e^{a\sqrt{p}}}. \tag{65}$$

В результате для последних двух оставшихся неизвестными в (58) функций получим окончательно:

$$\begin{gathered}\tilde{H}_1^+(z_1;p) = \frac{e^{2aiz_1}}{(i\sqrt{p} - w^+)e^{-a\sqrt{p}} - (i\sqrt{p} + w^+)e^{a\sqrt{p}}}, \\ \tilde{G}_1^-(z_2;p) = -\frac{e^{-2aiz_1}}{(i\sqrt{p} - w^+)e^{-a\sqrt{p}} - (i\sqrt{p} + w^+)e^{a\sqrt{p}}}.\end{gathered} \tag{66}$$

Далее находим изображение характеристической функции $\tilde{E}^*(\vec{z}^*;p)$ вспомогательного двумерного процесса $\overline{U}^*$ по первой формуле Сохоцкого (25), после чего изображение характеристической функции $\tilde{E}_U(z;p)$ исходного процесса $U = (U_1 + U_2)/2$ находится подстановкой в $\tilde{E}$ векторного аргумента $\vec{z} = (z/2, z/2)^{\mathrm{T}}$, что дает

$$\begin{gathered}\tilde{E}_U(z;p) = \frac{1}{z^2 + p} - \frac{2iA(p)z}{z^2 + p} \times \\ \times \left(\frac{e^{iaz}}{z + i(\sqrt{1+p} + 1)} + \frac{e^{-iaz}}{z - i(\sqrt{1+p} + 1)} \right).\end{gathered} \tag{67}$$

Обращение изображения (67) требует громоздких и трудоемких вычислений и для экономии места здесь не приводится. По нашему мнению, основной интерес представляет приведенный выше метод получения $\tilde{E}_U$, демонстрирующий технологию решения двумерной краевой задачи Римана.

Вместе с тем на основе (67) нетрудно получить ряд ценных в прикладном отношении результатов асимптотического характера при больших τ.

Рассмотрим асимптотику изображения (67) при $p \to 0$. Вспоминая определение w^+ и $A(p)$, имеем

$$\tilde{E}_U(z;p) = \frac{1}{p}(E_\infty(z) + O(p)),$$
$$E_\infty(z) = \frac{2}{(2a+1)z}\left(\frac{e^{iaz}}{z+2i} + \frac{e^{-iaz}}{z-2i}\right). \quad (68)$$

Используя известные теоремы об асимптотическом разложении оригиналов для изображения по Лапласу [13], находим

$$\lim_{\tau\to\infty} E_U(z;\tau) = \frac{2}{(2a+1)z}\left(\frac{e^{iaz}}{z+2i} + \frac{e^{-iaz}}{z-2i}\right), \quad (69)$$

что дает стационарное распределение в виде комбинации равномерного и двустороннего усеченного показательного законов распределения

$$f_\infty(u) = \frac{1}{2a+1}\begin{cases} 1, & \text{если } |u| \le a, \\ e^{-2(|u|-a)}, & \text{если } |u| > a, \end{cases} \quad (70)$$

согласующееся с хорошо известным стационарным решением уравнения Колмогорова для систем первого порядка [14].

Вернемся теперь к задаче определения времени пребывания системы в штатном режиме (41), т. е. к исследованию процесса $\overrightarrow{U}$, полученного добавлением третьей компоненты U_3 к вспомогательному двумерному процессу $\overrightarrow{U}^*$. Легко понять, что добавка третьей компоненты в (41) повлияет только на второе и третье слагаемое в (47) и, как следствие, только на знаменатели второй и третьей формул в (49), в которых появятся добавки к p, равные $-iz_3$ и iz_3 соответственно. Поэтому решение задачи (41) после упрощения будет иметь следующий вид:

$$\tilde{E}_{(U,U_3)}(z,z_3;p) = \frac{1}{z^2+p-iz_3} -$$
$$-\frac{iB(p,z_3)}{z^2+p-iz_3}\left(\frac{2z+z_3}{z+\nu^+}e^{iaz} + \frac{2z-z_3}{z-\nu^+}e^{-iaz}\right), \quad (71)$$

где введено обозначение $\nu^+ = i(\sqrt{1+p}+1)$ и

$$B(p,z_3) = \frac{1}{(i\sqrt{p-iz_3} - w^+)e^{-a\sqrt{p-iz_3}} - (i\sqrt{p-iz_3} + w^+)e^{a\sqrt{p-iz_3}}}. \quad (72)$$

Полагая $z = 0$, получим выражение для изображения по Лапласу характеристической функции времени пребывания системы в штатном режиме:

$$\tilde{E}_{U_3}(z_3;p) = \frac{1}{p-iz_3} - \frac{2iB(p,z_3)z_3}{i(1+\sqrt{1+p})(p-iz_3)}, \quad (73)$$

которое используется для получения начальных моментов процесса U_3, определяемых в виде $m_k(\tau) = M[U_3^k(\tau)]$. Их изображения $\tilde{m}_k(p)$ даются достаточно сложными и громоздкими выражениями, получаемыми путем дифференцирования (73) по z_3 и имеющими следующую асимптотику при $p \to 0$

$$\tilde{m}_1(p) = \frac{1}{p^2}(m_{1\infty} + O(p)),$$
$$\tilde{m}_2(p) = \frac{2}{p^3}(m_{2\infty} + O(p)), \quad (74)$$

где

$$m_{1\infty} = \frac{2a}{2a+1}, \quad m_{2\infty} = \frac{a(4a+1)}{(2a+1)^2}. \quad (75)$$

В результате при больших τ

$$M[U_3(\tau)] = \frac{2a}{2a+1}\tau(1+O(\tau^{-1})), \quad (76)$$

$$M[U_3^2(\tau)] = \frac{a(4a+1)}{(2a+1)^2}\tau^2(1+O(\tau^{-1})), \quad (76)$$

так что дисперсия и коэффициент вариации времени пребывания системы в штатном режиме будут иметь вид:

$$D(U_3(\tau)) = \frac{a}{(2a+1)^2}\tau^2(1+O(\tau^{-1})),$$
$$\gamma(\tau) = \frac{\sqrt{D(U_3(\tau))}}{M[U_3(\tau)]} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(1+O(\tau^{-1})), \quad (77)$$

причем дисперсия U_3 имеет максимум по a при $a = 1/2$.

В заключение заметим, что исходная система первого порядка (35) попадает в класс систем, которые могут быть исследованы методом Кохи–Аткинсона [15], однако изложенный в настоящей статье метод, во-первых, дает альтернативный и притом более простой способ получения характеристик процесса $\overrightarrow{U}^*$, описывающего поведение этой системы, и, во-вторых, позволяет легко получить вероятностные характеристики трехмерного процесса $\overrightarrow{U}$, что принципиально невозможно в методе [15], действие которого ограничивается лишь системами первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заяц О.И.** Применение уравнения Пугачёва—Свешникова к исследованию кусочно-линейных стохастических систем, линейных в полупространствах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. — № 4-1(182). — С. 128—142.

2. **Заяц О.И.** Статистическая динамика систем релейного типа и уравнение Пугачёва—Свешникова // Изв. вузов. Приборостроение. — 1992. — № 1/2. — С. 8—16.

3. **Заяц О.И.** Решение задачи Кренделла о фрикционном торможении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та,— 2007. — № 1 (49).— С. 244—252.

4. **Заяц О.И., Ильин И.Ю.** Об одной нелинейной стохастической задаче механики твердого тела // Труды СПбГТУ. Прикладная математика. — 1999. — № 477. — С. 72—74.

5. **Заяц О.И.** Об аналитическом решении задачи Феллера о длительности выбросов // Труды СПбГТУ. Прикладная математика. — 1996. — № 461. — С. 92—100.

6. **Заяц О.И.** Решение задачи Феллера для винеровского процесса с постоянным сносом // Труды СПбГТУ. Прикладная математика. — 1999. — № 477. — С. 67—72.

7. **Zayats O.I, Belavin I.V.** Application of Pugachev-Sveshnikov equation in reliability theory // III Internat. Conf. Tools for mathematical modelling. Proceedings. — St.-Petersburg: SPbGTU, 2001. — P. 193—200.

8. **Заяц О.И., Шилова Е.В.** Спектральный анализ случайных процессов в кусочно-линейных системах и уравнение Пугачёва-Свешникова // Труды СПбГТУ. Прикладная математика. — 2002. — № 485. — С. 55—69.

9. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

10. **Титчмарш Э.** Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: КомКнига: УРСС, 2005

11. **Какичев В.А.** Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных. — Тюмень: Изд-во ТГУ, 1978.

12. **Caughey T.K., Dienes J.K.** Analysis of non-linear first order system with a white noise input // J. of applied physics. — 1961. — Vol. 32. — № 11. — P. 2476—2479.

13. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971.

14. **Свешников А.А.** Прикладные методы теории марковских процессов. — СПб.: Лань, 2007.

15. **Atkinson J.D., Caughey T.K.** Spectral density of piecewise linear first order systems excited by white noise // Internat. journal of non-linear mechanics. — 1968. — Vol. 3. — № 2. — P. 137—156.

REFERENCES

1. **Zaiats O.I.** Primenenie uravneniia Pugacheva-Sveshnikova k issledovaniiu kusochno-lineinykh stokhasticheskikh sistem, lineinykh v poluprostranstvakh / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki. — St.-Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2013. — № 4-1(182). — S. 128—142. (rus)

2. **Zaiats O.I.** Statisticheskaia dinamika sistem releinogo tipa i uravnenie Pugacheva-Sveshnikova / Izv. vuzov. Priborostroenie. — 1992. — № 1/2. — S. 8—16. (rus)

3. **Zaiats O.I.** Reshenie zadachi Krendella o friktsionnom tormozhenii / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. —St.-Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2007. — № 1(49). — S. 244—252. (rus)

4. **Zaiats O.I., Il'in I.Iu.** Ob odnoi nelineinoi stokhasticheskoi zadache mekhaniki tverdogo tela / Trudy SPbGTU. Prikladnaia matematika. — 1999. — № 477. — S. 72—74. (rus)

5. **Zaiats O.I.** Ob analiticheskom reshenii zadachi Fellera o dlitel'nosti vybrosov / Trudy SPbGTU. Prikladnaia matematika. — 1996 — № 461. — S. 92—100. (rus)

6. **Zaiats O.I.** Reshenie zadachi Fellera dlia vinerovskogo protsessa s postoiannym snosom / Trudy SPbGTU. Prikladnaia matematika. — 1999. — № 477. — S. 67—72. (rus)

7. **Zayats O.I, Belavin I.V.** Application of Pugachev-Sveshnikov equation in reliability theory / III Internat. Conf. Tools for mathematical modelling. Proceedings. — St.-Petersburg: SPbGTU, 2001. — P. 193—200.

8. **Zaiats O.I., Shilova E.V.** Spektral'nyi analiz sluchainykh protsessov v kusochno-lineinykh sistemakh i uravnenie Pugacheva-Sveshnikova / Trudy SPbGTU. Prikladnaia matematika. — 2002. — № 485. — S. 55—69. (rus)

9. **Gakhov F.D.** Kraevye zadachi. — Moscow: Nauka, 1977. (rus)

10. **Titchmarsh E.** Vvedenie v teoriiu integralov Fur'e. — Moscow: KomKniga: URSS, 2005. (rus)

11. **Kakichev V.A.** Metody resheniia nekotorykh kraevykh zadach dlia analiticheskikh funktsii dvukh kompleksnykh peremennykh. — Tiumen': Izd-vo TGU, 1978. (rus)

12. **Caughey T.K., Dienes J.K.** Analysis of nonlinear first order system with a white noise input / Journal of applied physics. – 1961. – Vol. 32. – № 11. – P. 2476–2479.

13. **Dech G.** Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniiu preobrazovaniia Laplasa i Z-preobrazovaniia. – Moscow: Nauka, 1971. (rus)

14. **Sveshnikov A.A.** Prikladnye metody teorii markovskikh protsessov. – St.-Petersburg: Lan', 2007. (rus)

15. **Atkinson J.D., Caughey T.K.** Spectral density of piecewise linear first order systems excited by white noise / Internat. journal of non-linear mechanics. – 1968. – Vol. 3. – № 2. – P. 137–156.

ЗАЯЦ Олег Иванович – *доцент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, кандидат физико-математических наук.*
195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
E-mail: zay.oleg@gmail.com

ZAYATS, Oleg I. *St. Petersburg State Polytechnical University.*
195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St.-Petersburg, Russia.
E-mail: zay.oleg@gmail.com

БЕРЕЗИН Сергей Васильевич – *аспирант кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
E-mail: servberezin@yandex.ru

BEREZIN, Sergey V. *St. Petersburg State Polytechnical University.*
195251, Politekhnicheskaya Str. 29, St.-Petersburg, Russia.
E-mail: servberezin@yandex.ru