УДК 517.518.82

П.К. Корнеев, И.А. Журавлёва

ПОСТРОЕНИЕ НАИЛУЧШИХ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ, ПРИБЛИЖАЮЩИХ ФУНКЦИЮ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

P.K. Korneyev, I.A. Zhuravleva

CONSTRUCTING BEST MEAN-SQUARE POLYNOMIALS APPROXIMATING A FUNCTION AND ITS DERIVATIVES

Предложен прямой метод построения полинома m-й степени наилучшего среднеквадратического приближения, аппроксимирующий одновременно и функцию, и ее производные до m-го порядка. Эти полиномы близки к полиномам наилучших равномерных приближений.

АППРОКСИМАЦИЯ. ПОЛИНОМЫ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ПОЛИНОМЫ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ЧЕБЫШЁВСКАЯ НОРМА ФУНКЦИЙ.

The paper proposes a direct method for constructing a polynomial of degree m-best mean approximation that approximates both the function and its derivatives up to the m-th order. These polynomials are close to polynomials of best uniform approximations.

APPROXIMATION. BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATION. POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF THE RMS. CHEBYSHEV NORM FUNCTIONS.

Вопросу приближения функций полиномами наилучшего приближения посвящена журнальная [1], монографическая [2—4], справочная [5—6] и учебная [7] литература.

Алгоритмы построения полиномов наилучшего приближения носят итерационный характер [1, 2, 7]. Но как оказалось, полиномы наилучшего равномерного приближения плохо приближают производные функций [6], а полином наилучшего среднеквадратического приближения, построенный предлагаемым методом, не только хорошо приближает данную функцию на отрезке, но и ее производные.

1. Пусть аналитически заданную функцию $y = f(x)$, имеющую на отрезке $[a, b]$ m производных $f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(m)}(x)$ ($f^{(m)}(x)$ может иметь разрыв первого рода), необходимо приблизить вместе с этими производными при помощи многочлена степени m:

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j. \qquad (1)$$

Это значит, что функция $f(x)$ приближается многочленом (1), производная $f'(x)$ приближается производной от многочлена (1), производная $f''(x)$ приближается второй производной от многочлена (1) и т. д. Многочлен, приближающий i-ю производную, будет иметь вид:

$$P_m^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{j\,!}{(j+1-i)\,!} a_j x^{j-1}. \qquad (2)$$

В частности, производная $f^{(m)}(x)$ будет приближаться постоянным числом $P_m^{(m)}(x) = m!\,a_m$.

2. Введем обозначения:

$$S_j = \int_a^b (f^{(j)}(x) - P_m^{(j)}(x))^2 dx,\ j = 1, 2, \ldots, m, \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = f(x),\ \ P_m^{(0)}(x) = P_m(x); \\ \Phi_j = \Phi_j(a_0, a_1, \ldots, a_m) = S_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (4)$$

Поставим задачу: среди многочленов m-й степени (1) найти такой, который реализует минимум каждого из выражений (4) одновременно.

Указанный минимум существует, т. к. выражения Φ_j как функции от $a_0, a_1, \ldots, a_m$

представляют собой многочлены второй степени, кроме того, $\Phi_j \geq 0$.

Для определения тех значений a_j, при которых Φ_j обращается в минимум, составляем следующую систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial a_j} = 0, \; j = 0, 1, \ldots, m. \quad (5)$$

В развернутом виде система (5) имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial a_j} = -2\int_a^b (f^{(j)}(x) - P_m^{(j)}(x)) j!\, dx = 0$$

или

$$\int_a^b (f^{(j)}(x) - P_m^{(j)}(x))dx = 0, \quad (6)$$

то есть

$$\int_a^b f^{(j)}(x)\; dx = \int_a^b P_m^{(j)}(x)dx, \; j = 0, 1, \ldots, m.$$

Последняя система представляет систему $m+1$ линейных уравнений относительно параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$Aa = f, \quad (7)$$

где матрица

$$A = \begin{bmatrix} \int_a^b dx & \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx & \int_a^b x^3 dx & \int_a^b x^4 dx & \cdots & \int_a^b x^m dx \\ 0 & 1!\int_a^b dx & 2\int_a^b x dx & 3\int_a^b x^2 dx & 4\int_a^b x^3 dx & \cdots & m\int_a^b x^{m-1} dx \\ 0 & 0 & 2!\int_a^b dx & \frac{3!}{1!}\int_a^b x dx & \frac{4!}{2!}\int_a^b x^2 dx & \cdots & \frac{m!}{(m-2)!}\cdot\int_a^b x^{m-2} dx \\ 0 & 0 & 0 & 3!\int_a^b dx & \frac{4!}{1!}\int_a^b x dx & \cdots & \frac{m!}{(m-3)!}\cdot\int_a^b x^{m-3} dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4!\int_a^b dx & \cdots & \frac{m!}{(m-4)!}\cdot\int_a^b x^{m-4} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m!\cdot\int_a^b dx \end{bmatrix}$$

является верхней треугольной матрицей и $A_{jj} \neq 0 \;\; (j = 0, 1, \ldots, m)$;

$$a = [a_0, a_1, \ldots, a_m]^{\mathrm{T}},$$

$$f = \left[\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f'(x)dx, \ldots, \int_a^b f^{(m)}(x)dx\right]^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, система (7) имеет единственное решение $a_0, a_1, \ldots, a_m,$, которое будет давать наименьшие значения интегралам $S_j \;\; (j = 0, 1, \ldots, m)$. Подставляя найденное решение в формулу (1), получим искомый полином, решающий поставленную выше задачу.

3. Приведем расчетные формулы определения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ для некоторых частных случаев.

3.1. В случае аппроксимации функции $f(x)$ многочленом первой степени $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ система (7) будет иметь вид

$$(b-a)a_0 + \frac{b^2 - a^2}{2}\cdot a_1 = \int_a^b f(x)dx,$$

$$(b-a)a_1 = \int_a^b f'(x)dx.$$

Решая ее, мы получаем искомые коэффициенты a_1, a_0:

$$a_1 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{b+a}{2}\cdot a_1.$$

3.2. При аппроксимации функции $f(x)$ многочленом второй степени $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ система (7) будет иметь вид

$$(b-a)a_0 + \frac{b^2 - a^2}{2}\cdot a_1 + \frac{b^3 - a^3}{3}\cdot a_2 = \int_a^b f(x)dx,$$

$$(b-a)a_1+(b^2-a^2)a_2=\int_a^b f'(x)dx,$$

$$2(b-a)a_2=\int_a^b f''(x)dx.$$

Решая ее, мы получим искомые коэффициенты a_2, a_1, a_0:

$$a_2=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f''(x)dx,$$

$$a_1=\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx-(b+a)\cdot a_2,$$

$$a_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{b+a}{2}\cdot a_1-$$

$$-\frac{b^2+ba+a^2}{3}\cdot a_2.$$

3.3. При аппроксимации $f(x)$ многочленом третьей степени $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+$ $+a_3x^3$ получим следующие значения коэффициентов a_3, a_2, a_1, a_0:

$$a_3=\frac{1}{6(b-a)}\int_a^b f'''(x)dx,$$

$$a_2=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f''(x)dx-\frac{3}{2}\cdot(b+a)\cdot a_3,$$

$$a_1=\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx-(b+a)\times$$

$$\times a_2-(b^2+ba+a^2)\cdot a_3,$$

$$a_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{b+a}{2}\cdot a_1-$$

$$-\frac{b^2+ba+a^2}{3}\cdot a_2-\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\cdot a_3.$$

4. Приведем значения коэффициентов приближающих полиномов для функции $y=\sin(x)$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

а) $\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{3}a_kx^k,\ \|r\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<2{,}1\cdot10^{-4}$

a_0	$2{,}0002\cdot10^{-4}$	a_2	$-9{,}6849\cdot10^{-3}$
a_1	1,0005	a_3	−0,1501

б) $\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{4}a_kx^k,\ \|r\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<5{,}5\cdot10^{-5}$

a_0	$2{,}93988\cdot10^{-6}$	a_3	−0,17446
a_1	1,00048	a_4	0,01554
a_2	$-1{,}00011\cdot10^{-4}$		

в) $\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{5}a_kx^k,\ \|r\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<3\cdot10^{-6}$

a_0	$2{,}939875\cdot10^{-6}$	a_3	−0,166747
a_1	1,000007	a_4	$8{,}071007\cdot10^{-4}$
a_2	$-1{,}000112\cdot10^{-4}$	a_5	$7{,}502623\cdot10^{-3}$

г) $\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{6}a_kx^k,\ \|r\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<5{,}6\cdot10^{-7}$

a_0	$4{,}5352811\cdot10^{-8}$	a_4	$8{,}358343\cdot10^{-6}$
a_1	1,0000071	a_5	$8{,}7230117\cdot10^{-3}$
a_2	$-1{,}4703024\cdot10^{-6}$	a_6	$-5{,}1794893\cdot10^{-4}$
a_3	−0,1667472		

д) $\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{7}a_kx^k,\ \|r\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<4{,}6\cdot10^{-8}$

a_0	$4{,}5352811\cdot10^{-8}$	a_4	$8{,}3335025\cdot10^{-6}$
a_1	1,0000001	a_5	$8{,}3373575\cdot10^{-3}$
a_2	$-1{,}4703024\cdot10^{-6}$	a_6	$-2{,}6902553\cdot10^{-5}$
a_3	−0,1666678	a_7	$-1{,}7863419\cdot10^{-4}$

Оценим в этом случае качество приближений производных данной функции построенным полиномом седьмой степени.

Пусть $f(x)$ – данная функция; $P(x)$ – приближающий полином седьмой степени; $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ – производные данной функции; $P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$, $P^{(4)}(x)$ – производные приближающего полинома $P(x)$; $r_i=f^{(i)}(x)-P^{(i)}(x)$ $(i=0,1,2,3,4)$ – погрешности. Тогда

$$\|f'(x)-P'(x)\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<3{,}8\cdot10^{-7},$$

$$\|f''(x)-P''(x)\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<3\cdot10^{-6},$$

$$\|f'''(x)-P'''(x)\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<2{,}5\cdot10^{-5},$$

$$\|f^{(4)}(x)-P^{(4)}(x)\|_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}<2{,}1\cdot10^{-4}.$$

5. Сравним качество аппроксимаций полиномом седьмой степени наилучшего приближения и полиномом седьмой степени, построенным описанным выше методом.

Имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)\approx p_7(x)=\sum_{k=0}^{3}b_{2k+1}x^{2k+1},$$

$$\left\| \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right) - p_7(x) \right\|_{[-1;\,1]} = 1{,}2\cdot 10^{-9},$$

где $p_7(x)$ — полином наилучшего приближения [1].

В нашем случае

$$\left\| \sin(x) - P_7(x) \right\|_{\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right]} < 4{,}6\cdot 10^{-8}.$$

Наилучшие среднеквадратические полиномы строятся просто, однако качество приближения в этом случае хуже приближения полиномами наилучшего равномерного приближения примерно на порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дзядык, В.К.** Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функции, e^x, sin$x$ и др. [Текст]/ В.К. Дзядык. — Укр. мат. журн. — 1973. —Вып. 25. — № 4. — С. 435—453.

2. **Ремез, Е.Я.** Основы численных методов чебышёвского приближения [Текст] / Е.Я. Ремез. — Киев: Наук. думка, 1969. — 623 с.

3. **Дзядык, В.К.** Введение в теорию приближения функций полиномами [Текст] / В.К. Дзядык. —М.: Наука, 1977. — 512 с.

4. **Натансон, И.П.** Конструктивная теория функций [Текст] / И.П. Натансон. —М. —Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1949. — 688 с.

5. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Вычисление элементарных функций [Текст] / Под общ. ред. Л.А. Люстерника, А.Р. Янпольского. —М.: Физматгиз, 1963. —248 с.

6. Справочная математическая библиотека. Элементы теории функций. Функции действительного переменного. Приближение функций. Почти периодические функции [Текст] / Под общ. ред. П.Л. Ульянова, А.Р. Янпольского. — М.: Физматгиз, 1963. — 244 с.

7. **Волков, Е.А.** Численные методы [Текст] / Е.А. Волков. — 2-е изд. испр. — М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1987. — 248 с.

REFERENCES

1. **Dziadyk V.K.** Ob effektivnom postroenii mnogochlenov, kotorye osushchestvliaiut blizkoe k nailuchshemu priblizhenie funktsii e^x, sin$x$ i dr. / Ukr. mat. zhurn. — 1973. — Vip. 25. —№ 4. — S. 435—453.

2. **Remez E.Ia.** Osnovy chislennykh metodov chebyshevskogo priblizheniia. — Kiev: Nauk. dumka, 1969. — 623 s.

3. **Dziadyk V.K.** Vvedenie v teoriiu priblizheniia funktsii polinomami. —Moscow: Nauka, 1977. — 512 s. (rus)

4. **Natanson I.P.** Konstruktivnaia teoriia funktsii. Moscow-Leningrad: Gos. Izd-vo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1949. — 688 s. (rus)

5. Spravochnaia matematicheskaia biblioteka. Matematicheskii analiz. Vychislenie elementarnykh funktsii; Pod obshch. red. L.A. Liusternika, A.R. Ianpol'skogo. — Moscow: Fizmatgiz, 1963. — 248 s. (rus)

6. Spravochnaia matematicheskaia biblioteka. Elementy teorii funktsii. Funktsii deistvitel'nogo peremennogo. Priblizhenie funktsii. Pochti periodicheskie funktsii; Pod obshch. red. P.L. Ul'ianova, A.R. Ianpol'skogo. — Moscow: Fizmatgiz, 1963. — 244 s. (rus)

7. **Volkov E.A.** Chislennye metody. — 2-e izd. ispr. — Moscow: Nauka. Gl. red. Fizmatlit, 1987. — 248 s. (rus)

КОРНЕЕВ Петр Кириллович — *доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования Института математики и естественных наук Северо-Кавказского федерального университета, кандидат физико-математических наук.*

355000, Россия, г. Ставрополь, пр. Кулакова, д. 2.

KORNEYEV, Petr K. *North-Caucasian Federal University.*

355000, prosp. Kulakova 2, Stavropol, Russia.

ЖУРАВЛЁВА Ирина Александровна — *доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования Института математики и естественных наук Северо-Кавказского федерального университета, кандидат педагогических наук.*

355000, Россия, г. Ставрополь, пр. Кулакова, д. 2.

ZHURAVLEVA, Irina A. *North-Caucasian Federal University.*

355000, prosp. Kulakova 2, Stavropol, Russia.