



УДК 528.854

В.Б. Мнухин

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ СИММЕТРИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

V.B. Mnukhin

INTEGRAL TRANSFORM FOR SYMMETRY RECOGNITION OF GRAY-LEVEL IMAGES

Предложено интегральное преобразование для распознавания симметрии полутоновых изображений. Вводимое преобразование оказывается инвариантным относительно сдвигов и вращений, но зависит от масштабирования. Свойства преобразования строго доказаны; на их основе предложен ряд тестов, позволяющих эффективно распознавать группу симметрий. Рассмотрены вопросы применимости предложенного метода к анализу симметрии цифровых изображений.

РАСПОЗНАВАНИЕ СИММЕТРИИ. ПОЛУТОНОВЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ. ГРУППА СИММЕТРИЙ. ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–МЕЛЛИНА.

A transform for symmetry recognition in 2D gray-level images is considered. The transform is invariant under rotations and translations, but is not scale-invariant. The rigorous mathematical description of its properties is provided and a series of tests for symmetry recognition is produced. Some details of the discrete case realization are given and illustrated with experiment results.

SYMMETRY RECOGNITION. GRAY-LEVEL IMAGES. SYMMETRY GROUP. FREQUENCY DOMAIN. INTEGRAL TRANSFORM. FOURIER–MELLIN TRANSFORM.

Изучение симметрии изображений в настоящее время — одно из активно развиваемых направлений теоретической информатики. Работы в этой области активно стимулируются, в частности тем, что группы симметрий изображений не зависят от их размеров, поворотов, яркости, плотности и центрирования, являясь тем самым сильными дескрипторами изображенных объектов [1–3]. Данные о симметрии объекта позволяют:

производить сжатие и компактное хранение видеоинформации;

осуществлять как обычный, так и ассоциативный поиск видеоданных, необходимость в котором возникает при создании современных интеллектуальных систем;

делать анализ графической информации, направленный на повышение качества и достоверности работы систем распознавания образов и др.

В настоящей статье рассматривается задача распознавания группы симметрий

изображения с точностью до изоморфизма. Для ее решения предлагается новое двумерное интегральное преобразование, являющееся непрерывным по первой переменной и дискретным по второй. Идея его построения основана [4] на рассмотрении Фурье-образа изображения в полярной системе координат, что позволяет трансформировать вращения исходного изображения в сдвиги его образа.

Отметим, что вводимое преобразование до некоторой степени аналогично т. н. *преобразованию Фурье–Меллина* [5], инвариантному относительно как сдвигов и вращений, так и масштабирования. Заметим, что последнее важно для эффективного решения задач совмещения изображений [6], однако избыточно при распознавании симметрии. В то же время использование преобразованием Фурье–Меллина полярно-логарифмической системы координат приводит к значительным вычислительным сложностям. В частности, основанный на

нем метод [7] распознавания симметрии требует априорного знания координат центра симметрии.

Предлагаемый в статье подход свободен от указанных недостатков. Простота аналитического выражения вводимого преобразования позволяет сформулировать и строго доказать его свойства в окончательной форме. На их основе устанавливается ряд следствий, позволяющих эффективно распознавать группу симметрий. Их применение к анализу симметрий цифровых изображений иллюстрируется результатами экспериментов.

Группа симметрий изображения

Будем считать, что на действительной плоскости \mathbb{R}^2 введена декартова система координат xOy . Под *изображением* (точнее, под *плоским непрерывным полутоновым финитным изображением*) будем понимать действительную неотрицательную ограниченную функцию $f(x,y)$, определенную всюду на \mathbb{R}^2 , но отличную от нуля только внутри некоторой области $I \subset \mathbb{R}^2$ конечного диаметра d . Рассмотрим следующие элементарные преобразования изображений:

1) *сдвиг* T_a на вектор $a = (x_0, y_0)$:
 $T_a[f] = f(x - x_0, y - y_0)$;

2) *вращение* R_α на угол α вокруг начала координат O :

$$R_\alpha[f] = f(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha);$$

3) *отражение* M относительно оси Ox :
 $M[f] = f(x, -y)$.

Более сложные преобразования получаются как композиции элементарных. В частности, преобразование M_L *отражения относительно прямой* L , проходящей через точку a и наклоненной к оси Ox на угол α , записывается как $M_L = T_a R_{2\alpha} M T_a^{-1}$.

(Действительно, если L проходит через начало координат, то равенство $M_L = R_{2\alpha} M$ следует из элементарных геометрических соображений; в общем случае остается заметить, что точку a можно сначала сместить в начало координат, а после выполнения преобразования $R_{2\alpha} M$ вернуть в прежнее положение с помощью соответствующих сдвигов.)

Определение 1. Изображение f обладает *отражательной симметрией* относительно прямой L (или *симметрично относительно* L), если

$$M_L[f(x, y)] = f(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

В этом случае L называется *осью симметрии*.

Заметим, что центром вращения может служить произвольная точка плоскости. Легко видеть, что соответствующее преобразование $R_{a,\alpha}$ *вращения на угол* α *вокруг точки* a можно записать как

$$R_{a,\alpha} = T_a R_\alpha T_a^{-1}.$$

Определение 2. Будем говорить, что изображение f в точке a обладает *вращательной симметрией бесконечного порядка*, если $R_{a,\alpha}[f] = f$ для всех углов α . Если же найдется угол β , ($0 < \beta < 2\pi$), такой, что и $R_{a,\beta}[f] = f$, и $R_{a,\alpha}[f] \neq f$ для всех меньших углов α , $0 < \alpha < \beta$, то в точке a изображение имеет *вращательную симметрию порядка* $k = 2\pi/\beta > 1$, где, как нетрудно показать, число k является целым. Точка a называется *центром* вращательной симметрии.

Всевозможные композиции элементарных преобразований T_a , R_α и M образуют бесконечную *группу перемещений* Γ , являющуюся подгруппой группы всех аффинных преобразований плоскости [8]. Таким образом, Γ естественно действует на множестве изображений.

Определение 3. *Группой симметрий* изображения f называется его стабилизатор $\Gamma(f)$ в группе перемещений. Другими словами, это множество всех тех перемещений плоскости, которые не изменяют данное изображение.

Классы изоморфизма групп симметрий финитных изображений хорошо известны [8]. Это

1) *единичная группа* I , соответствующая изображениям без нетривиальных симметрий;

2) *бесконечная ортогональная группа* $O(2)$, порождаемая вращением бесконечного порядка и являющаяся группой симметрий окружности;

3) *конечные циклические группы* Z_k порядка $k > 2$, порождаемые вращением во-

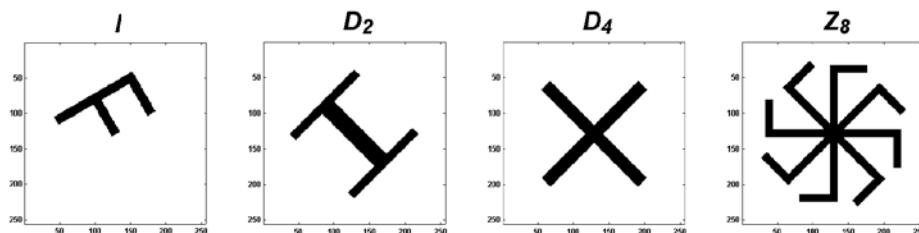


Рис. 1. Примеры изображений с небольшими группами симметрий

круг некоторой точки на угол $2\pi/k$;

4) конечные *диэдральные группы* D_k порядка $2k \geq 2$, порождаемые отражением и/или вращением порядка k с центром на оси отражательной симметрии. (Несмотря на изоморфизм $D_1 \cong Z_2$, мы отличаем группу D_1 , порождаемую единственным *отражением*, от группы Z_2 , порождаемой *вращением* на 180° , поскольку соответствующие этим группам симметрии изображений различны). На рис. 1 приведены примеры изображений с небольшими группами симметрий.

***H*-преобразование и его свойства**

Введем интегральное преобразование, играющее ключевую роль в нашем подходе к распознаванию симметрии. Оно основано на двумерном преобразовании Фурье, определяемом [9] следующим образом:

$$F[f] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy.$$

Заметим, что сходимость интеграла немедленно вытекает из наложенных на функцию $f(x, y)$ ограничений. Фурье-образ $F(u, v)$ определен на плоскости uOv , называемой *частотной областью*. Введем в ней полярную систему координат $rO\varphi$ с тем же самым началом O и с полярной осью $\varphi = 0$, совпадающей с положительной полуосью Ou . Рассмотрим Фурье-образ $F(u, v)$ в системе координат $rO\varphi$, полагая $\Phi(r, \varphi) = F(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Наложим на функцию f дополнительное ограничение. Поскольку реальные изображения являются гладкими, условимся считать $f(x, y)$ бесконечно дифференцируемой в каждой точке по любому направлению. Тогда для всякого фиксированного полярного угла $\varphi_0 \in [0, \pi]$ модуль функции $\Phi(r, \varphi_0)$ быстро убывает с ростом радиуса r ,

что гарантирует корректность следующего определения.

Определение 4. *H*-преобразованием $H[f]$ функции $f(x, y)$ будем называть следующую функцию двух переменных:

$$H(w, n) = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi |\Phi(r, \varphi)| e^{-i(wr + 2n\varphi)} dr d\varphi,$$

где *непрерывная* переменная w принимает всевозможные действительные значения, а *дискретная* переменная n пробегает множество всех целых чисел \mathbb{Z} . Удобно рассматривать $H[f]$ как бесконечную (в обе стороны) последовательность функций

$$\dots, H(w, -2), H(w, -1), H(w, 0), H(w, 1), H(w, 2), \dots$$

Функцию $H(w, n)$ условимся называть *H-образом* для f .

Рассмотрим свойства введенного преобразования. Отметим, что поскольку $H[f]$ зависит только от энергетического спектра $|F[f]|$ изображения, *H*-преобразование не является ни обратимым, ни линейным, однако для произвольной константы $c \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $H[cf] = |c| \cdot H[f]$. Покажем, как меняется *H*-образ изображения при его сдвигах и вращениях.

Утверждение 1. *Преобразование $H[f]$ инвариантно относительно сдвигов: $H[T_a f] = H[f]$.*

Доказательство. Воспользуемся известным свойством преобразования Фурье [9]: $|F[T_a f]| = |e^{-2\pi i(x_0 u + y_0 v)} F(u, v)| = |F(u, v)|$, где $a = (x_0, y_0)$. Из него вытекает, что функция $|\Phi(r, \varphi)|$ не меняется при сдвигах, а значит, не меняется при сдвигах и $H[f]$. ■

Утверждение 2. *При вращении изображения f на угол α вокруг начала координат, его *H*-образ $H(w, n)$ умножается на фазовый множитель:*

$$H[R_\alpha f] = e^{2in\alpha} H(w, n).$$

Доказательство. Как известно [9], непрерывное преобразование Фурье коммутирует с вращениями, то есть $FR_\alpha = R_\alpha F$. Поэтому, обозначая Фурье-образ в полярной системе координат как $F[f] = \Phi(r, j)$, получим $F[R_\alpha f] = R_\alpha[F[f]] = \Phi(r, \varphi + \alpha)$, и

$$H[R_\alpha f] = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi |\Phi(r, \varphi + \alpha)| e^{-i(wr+2n\theta)} dr d\varphi.$$

Выполняя замену переменной $\theta = \varphi + \alpha$, получаем

$$H[R_\alpha f] = e^{2i\alpha} \int_0^{+\infty} \int_\alpha^{\pi+\alpha} |\Phi(r, \theta)| e^{-i(wr+2n\theta)} dr d\theta.$$

Поскольку f принимает только действительные значения, $F(u, v) = F^*(-u, -v)$, и, следовательно, функция $|\Phi(r, \theta)|$ является периодической по θ с периодом π . Так как n – целое, периодическим будет и все подынтегральное выражение. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \int_\alpha^{\pi+\alpha} |\Phi(r, \theta)| e^{-i(wr+2n\theta)} dr d\theta = H[f],$$

откуда и вытекает требуемое тождество. ■

Рассмотрим поведение H -преобразования при вращениях $R_{a,\alpha}$ вокруг произвольной точки a . Пользуясь предыдущими результатами и тождеством $R_{a,\alpha} = T_a R_\alpha T_a^{-1} = T_a R_\alpha T_{-a}$, немедленно получаем

Следствие 1. Выбор центра вращения изображения f не влияет на его H -преобразование, $H[R_{a,\alpha} f] = H[R_\alpha f]$, а модуль H -преобразования инвариантен относительно вращений, $|H[R_{a,\alpha} f]| = |H[f]|$. В частности,

$$H[R_{\alpha,\pi/4} f] = i^n H(w, n),$$

$$H[R_{\alpha,\pi/2} f] = (-1)^n H(w, n), \quad H[R_{\alpha,\pi} f] = H[f]. \quad \blacksquare$$

Утверждение 3. Отражение изображения f от любой из координатных осей Ox или Oy меняет знак переменной n в функции $H(w, n) = H[f]$:

$$\begin{aligned} H[Mf] &= H[f(x, -y)] = \\ &= H(w, -n) = H[f(-x, y)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $F[f] = F(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \Phi(r, \varphi)$, тогда $F[Mf] = F[f(x, -y)] = \Phi(r, -\varphi)$. Подставляя это выражение в определение 4 и выполняя в интеграле замену переменных $\theta = -\varphi$, получим, с учетом периодичности подынтегрального выражения, что $H[Mf] = H(w, -n)$. Последнее равенство вытекает из соотно-

шения $f(-x, y) = R_\pi M[f]$. ■

Случай отражения M_L относительно произвольной оси L чуть более сложен.

Утверждение 4. Если прямая L образует с осью Ox угол α , а H -образ исходного изображения f равен $H(w, n) = H[f]$, то $H[M_L f] = e^{4i\alpha} H(w, -n)$.

Доказательство. Ранее было замечено, что $M_L = T_a R_{2\alpha} M T_{-a}$, где a – произвольная точка на L . Учитывая предыдущие результаты, получаем

$$\begin{aligned} H[M_L f] &= H[T_a R_{2\alpha} M T_{-a} f] = \\ &= H[R_{2\alpha} M T_{-a} f] = \\ &= e^{4i\alpha} H[M T_{-a} f] = e^{4i\alpha} H(w, -n), \end{aligned}$$

что завершает доказательство. ■

Распознавание симметрии с помощью H -преобразования

Результаты предыдущего раздела приводят к ряду тестов на наличие у изображений того или иного типа симметрии. Вспоминая, что отражательная симметричность относительно оси L равносильно условию $M_L[f] = f$, немедленно получаем из утверждения 4 следующий результат.

Утверждение 5. Если изображение f симметрично относительно некоторой прямой, образующей с осью Ox угол α , то H -образ этого изображения удовлетворяет тождеству $H(w, n) \equiv e^{4i\alpha} H(w, -n)$.

В частности, если для некоторых значений переменных w и n справедливо неравенство $|H(w, n)| \neq |H(w, -n)|$, то изображение не обладает отражательной симметрией.

Рассмотрим тесты на вращательную симметрию.

Утверждение 6. Если изображение f допускает вращательную симметрию бесконечного порядка (и значит, имеет группу симметрий $O(2)$), то $H(w, n) \equiv 0$ для всех $n \neq 0$.

Доказательство. Как уже отмечалось, непрерывное преобразование Фурье коммутирует с вращениями, а значит, сохраняет вращательные симметрии исходного изображения. Следовательно, для изображения с группой $O(2)$ функция $\Phi(r, \varphi)$ не зависит от полярного угла φ . Пусть $\Phi(r, \varphi) = \Psi(r)$, тогда при $n \neq 0$ имеем

$$H(w, n) = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi |\Psi(r)| e^{-i(wr+2n\varphi)} dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{+\infty} |\Psi(r)| e^{-iwr} dr \int_0^\pi e^{-2in\varphi} d\varphi = 0. \blacksquare$$

Для формулировки аналогичного результата об изображениях, допускающих вращательные симметрии только конечных порядков, введем следующую функцию на множестве \mathbb{Z} целых чисел:

$$h(k) = \begin{cases} k, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ k/2, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Утверждение 7. Если изображение f допускает вращение порядка k , то $H(w, n) \equiv 0$ для всех $n \neq 0 \pmod{h(k)}$.

Другими словами, периодическое появление в последовательности

$$\dots, H(w, -2), H(w, -1), H(w, 0), H(w, 1), H(w, 2), \dots$$

нулевых функций указывает на вращательную симметрию изображения, причем «ширина нулевого интервала» связана с порядком симметрии.

Доказательство. Действительно, в этом случае $R_{a, 2\pi/k}[f] = f$. Переходя к H -образам, получаем $H[R_{a, 2\pi/k}f] = H[f]$, или $(1 - e^{4\pi in/k})H(w, n) \equiv 0$. Значит, если $e^{4\pi in/k} \neq 1$, то $H(w, n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Остается заметить, что при нечетном k равенство $e^{4\pi in/k} = 1$ означает, что n делится на k ; а при четном k — что n делится на $k/2$. \blacksquare

Из утверждений 5 и 7 вытекает тест на диэдральность.

Следствие 2. Если изображение f имеет диэдральную группу симметрий D_k порядка $2k$, то

$$H(w, n) = \begin{cases} e^{4\pi in\alpha} H(w, -n), & n \equiv 0 \pmod{h(k)}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где α является углом наклона произвольной оси отражательной симметрии данного изображения к Ox .

(Корректность предыдущего утверждения следует из того, что разность углов наклона двух различных осей симметрии всегда кратна π/k .)

Отметим, что предыдущие результаты дают только необходимые условия наличия у

изображения того или иного типа симметрии, или же достаточные условия ее отсутствия. Кроме того, из утверждения 7 вытекает невозможность различить вращения порядков $2k + 1$ и $2(2k + 1)$ с помощью только H -преобразования. Это связано с тем, что Фурье-спектр $|F[f]|$ любого изображения обладает центральной симметрией. Как следствие, H -преобразования изображений с группами Z_{2k+1} и $Z_{2(2k+1)}$ устроены аналогично. Вместе с тем нетрудно заметить, что изображение с группой $Z_{2(2k+1)}$ всегда будет центрально-симметричным, а с группой Z_{2k+1} — нет. Несложный тест на центральную симметричность изображений предложен в [4], где могут быть также найдены дальнейшие детали.

Распознавание симметрии цифровых изображений

Рассмотрим некоторые детали применения результатов предыдущего раздела для практически значимого случая цифровых изображений.

Назовем цифровым изображением размера $N \times N$ произвольную действительную неотрицательную ограниченную функцию $f(x, y)$ двух дискретных аргументов, определенную на множестве $[0, N - 1] \times [0, N - 1] \subset Z^2$. Под диаметром цифрового изображения будем понимать размер d наименьшей квадратной области, вне которой функция $f(x, y)$ принимает только нулевые значения.

Чтобы ввести дискретный аналог H -преобразования, воспользуемся дискретным преобразованием Фурье (ДПФ):

$$F(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{N} (ux + vy) \right\}.$$

Кроме того, необходимо задать на $[0, N - 1] \times [0, N - 1]$ некоторый аналог полярной системы координат, или, что равносильно, определить оператор дискретного вращения \mathfrak{R}_α . Отметим, что это является нетривиальной задачей, допускающей различные решения, а вполне адекватное определение полярной системы координат на дискретной плоскости представляется невозможным [10]. Обычно \mathfrak{R}_α вводится как $\mathfrak{R}_\alpha[f] = f([X] \bmod N, [Y] \bmod N)$, где $X = x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha$,

а $[X]$ и $[Y]$ означают ближайшие целые к X и Y соответственно. Это позволяет ввести дискретное H -преобразование по аналогии с определением 4. Отметим, что H -преобразование цифрового $(N \times N)$ -изображения является комплексной $(N \times N)$ -матрицей.

К сожалению, ДПФ не коммутирует с дискретными вращениями \mathfrak{R}_α , что препятствует немедленному переносу результатов предыдущего раздела на дискретный случай. Вместе с тем можно показать, что для цифровых изображений фиксированного диаметра d имеет место сходимость $\|(\mathfrak{R}_\alpha F - F\mathfrak{R}_\alpha)[f]\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, что позволяет использовать полученные для непрерывного случая результаты в дискретном случае при выполнении условий $N \gg 0$ и $d \ll N$.

Рассматривая симметрию цифровых изображений, следует учитывать, что поня-

тие симметрии непрерывных изображений ранее трактовалось как двузначное: функция $f(x,y)$ считалась либо обладающей некоторым типом симметрии, либо нет. При этом для реальных объектов симметрия никогда не бывает идеальной и говорить можно только о той или иной мере симметричности объекта. Более того, следует учитывать, что даже абсолютно симметричное относительно некоторой оси цифровое изображение может потерять эту симметричность при поворотах. Поэтому анализ H -преобразований цифровых изображений следует проводить статистическими методами.

В качестве примера рассмотрим рис. 2, показывающий визуализации матриц $\|\ln(1 + |H(w, n)|)\|$ для четырех изображений рис. 1. На всех визуализациях ось On направлена горизонтально, а ось Om —

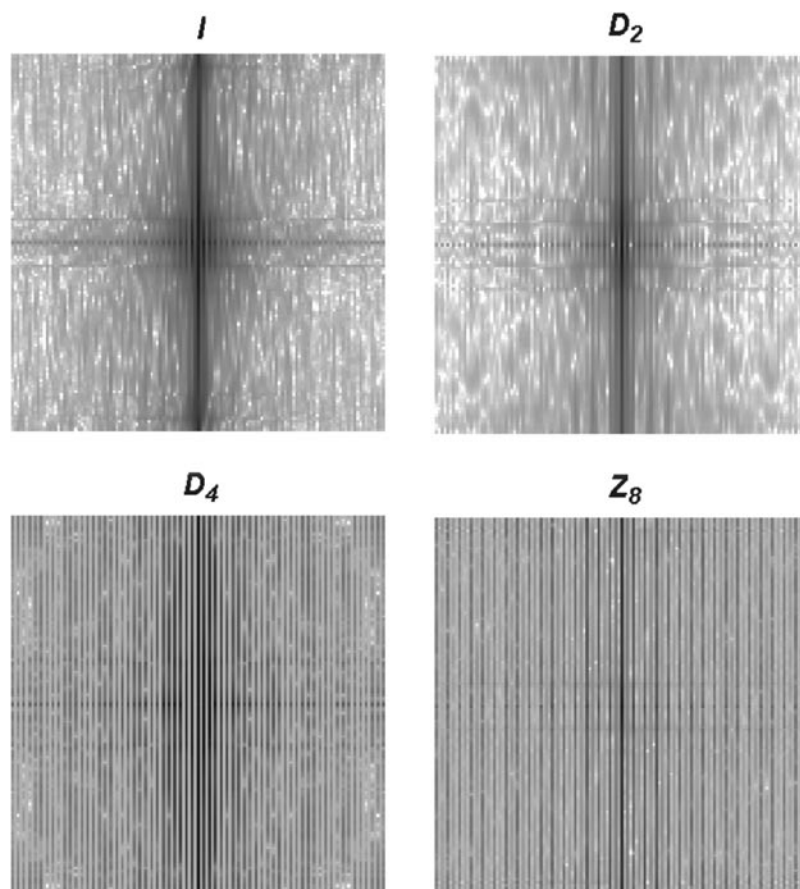


Рис. 2. Примеры визуализации H -преобразований изображений



вертикально; точка O совпадает с геометрическим центром; темные оттенки соответствуют большим значениям величин, а светлые — меньшим. Правый верхний рисунок соответствует изображению буквы **H** с диэдральной группой D_2 порядка 4. Хорошо заметна характерная симметричность рисунка относительно Ow , вытекающая из следствия 2. Статистическая проверка выполнения условия $H(w, n) = e^{4ina} H(w, -n)$ для всех w и n позволяет уточнить тип симметрии и оценить наклон оси симметрии исходного изображения. В частности, так можно отбросить гипотезу о нетривиальности симметрии у изображения буквы **F**, соответствующего левому верхнему рисунку.

Левый нижний рисунок соответствует изображению Андреевского креста с группой D_4 порядка 8. Симметричность относительно Ow указывает на наличие отражательной симметрии, а вытекающая из утверждения 7 характерная «полосатость» — на наличие вращения четвертого порядка. Правый нижний

рисунок соответствует 8-лучевой свастике с группой Z_8 . Можно заметить, что визуализация H -преобразования утратила Ow -симметричность, что говорит об отсутствии у свастики отражательной симметрии. В то же время ширина «темных полос» увеличилась до трех, что указывает на наличие вращательной симметрии восьмого порядка.

Таким образом, в работе предложен метод распознавания групп симметрий плоских полутонных изображений, основанный на использовании нового двумерного интегрального преобразования, непрерывного по одной переменной и дискретного по другой. Сформулированы и строго доказаны свойства этого преобразования. На их основе предложен ряд следствий, позволяющих эффективно распознавать симметрии как непрерывных, так и цифровых изображений

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-07-00591 и №13-07-00327.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chertok, M.** Spectral Symmetry Analysis [Text] / M. Chertok, Y. Keller // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2010. — Vol. 32. — P. 1227–1238.
2. **Каркищенко, А.Н.** Классификация изображений периодических структур на основе непрерывного преобразования симметрии [Текст] / А.Н. Каркищенко, В.Б. Мнухин // Матер. VIII Междунар. конф. Интеллектуализация обработки информации. — М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 359–362.
3. **Каркищенко, А.Н.** Преобразование симметрии периодических структур в частотной области [Текст] / А.Н. Каркищенко, В.Б. Мнухин // Матер. XV Всерос. конф. Математические методы распознавания образов. — М.: МАКС Пресс, 2011. — С. 386–389.
4. **Каркищенко, А.Н.** Распознавание симметрии изображений в частотной области [Текст] / А.Н. Каркищенко, В.Б. Мнухин // Матер. IX Междунар. конф. Интеллектуализация обработки информации. — М.: Торус Пресс, 2012. — С. 426–429.
5. **Reddy, S.** A FFT-based technique for transla-

tion, rotation, and scale invariant image registration [Text] / S. Reddy, B. Chatterji // IEEE Trans. on Image Processing. — 1996. — Vol. 5. — P. 1266–1271.

6. **Derrode, S.** Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description [Text] / S. Derrode, F. Ghorbel // Computer Vision and Image Understanding. — 2001. — Vol. 83. — P. 57–78.

7. **Derrode, S.** Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier–Mellin representation [Text] / S. Derrode, F. Ghorbel. // Signal Processing. — 2004. — Vol. 84. — P. 25–39.

8. **Никулин, В.В.** Геометрии и группы [Текст] / В.В. Никулин, И.П. Шафаревич. — М.: Наука, 1983. — 239 с.

9. **Poularikas, A.D.** Transforms and Applications Handbook [Text] / A.D. Poularikas. — CRC Press, 2010. — 1336 p.

10. **Beylkin, G.** On the fast Fourier transform of functions with singularities [Text] / G. Beylkin // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 1995. — Vol. 2. — P. 363–381.

REFERENCES

1. **Chertok M., Keller Y.** Spectral Symmetry Analysis / IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2010. — Vol. 32 — P. 1227–1238.

2. **Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.** Klassifikatsiia izobrazhenii periodicheskikh struktur na osnove nepreryvnogo preobrazovaniia simmetrii

/ Mater. VIII Mezhdunar. konf. Intellektualizatsiia obrabotki informatsii. – Moscow: MAKS Press, 2010. – S. 359–362. (rus)

3. **Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.** Preobrazovanie simmetrii periodicheskikh struktur v chastotnoi oblasti / Mater. XV Vseros. konf. Matematicheskie metody raspoznavaniia obrazov. – Moscow: MAKS Press, 2011. – S. 386–389. (rus)

4. **Karkishchenko A.N., Mnukhin V.B.** Raspoznavanie simmetrii izobrazhenii v chastotnoi oblasti / Mater. IX Mezhdunar. konf. Intellektualizatsiia obrabotki informatsii. – Moscow: Torus Press, 2012. – S. 426–429. (rus)

5. **Reddy S., Chatterji B.** A FFT-based technique for translation, rotation, and scale invariant image registration / IEEE Trans. on Image Processing.

–1996. –Vol. 5. – P. 1266–1271.

6. **Derrode S., Ghorbel F.** Robust and efficient Fourier–Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description / Computer Vision and Image Understanding. – 2001. – Vol. 83. – P. 57–78.

7. **Derrode S., Ghorbel F.** Shape analysis and symmetry detection in gray-level objects using the analytical Fourier–Mellin representation / Signal Processing. – 2004. –Vol. 84. – P. 25–39.

8. **Nikulin V.V., Shafarevich I.R.** Geometrii i gruppy. – Moscow: Nauka, 1983. –239 s. (rus)

9. **Poularikas A.D.** Transforms and Applications Handbook. – CRC Press, 2010. – 1336 p.

10. **Beylkin G.** On the fast Fourier transform of functions with singularities / Appl. Comput. Harmon. Anal. – 1995. – Vol. 2. – P. 363–381.

МНУХИН Валерий Борисович – доцент кафедры высшей математики Таганрогского технологического института Южного федерального университета, кандидат физико-математических наук.

347916, Россия, г. Таганрог, ул. Циолковского, д. 55.

E-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru

MNUKHIN, Valery B. *Taganrog Technological Institute of Southern Federal University.*

347916, Tsiolkovsky Str. 55, Taganrog, Russia

E-mail: mnukhin.valeriy@mail.ru