

УДК 514.743.2

А.Н. Макоха

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ТРИВЕКТОРОВ ВОСЬМОГО РАНГА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ГРАФОВ И ГРУПП ПОДСТАНОВОК

A.N. Makoha

RESEARCH OF CANONICAL TRIVECTORS OF EIGHTH GRADE BY MEANS OF THEORY OF THE GRAPHS AND GROUPS OF SUBSTITUTIONS

С помощью теории графов исследованы все типы канонических тривекторов восьмого ранга на предмет их однозначного представления. В случае их неоднозначности найдены группы подстановок, переводящие один тривектор в другой.

РАНГ ТРИВЕКТОРА. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ТРИВЕКТОРА. ГИПЕРПЛОСКОСТЬ. ЦИКЛОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГРАФА. ГРУППА ПОДСТАНОВОК.

In the article using the graph theory investigated all types of canonical trivectors eighth grade for their unambiguous representation. In the event of ambiguities found substitutions groups trivectors transform one into the other.

GRADE TRIVECTORS. CANONICAL FORM TRIVECTORS. HYPERPLANE. CYCLOMATIC NUMBER OF A GRAPH. SUBSTITUTION GROUPS.

Классификацию тривекторов (кососимметрических тензоров третьей валентности) восьмого ранга независимо друг от друга провели Гуревич [1] и Лонго [15].

Классификация, проведенная Гуревичем, основана на системе арифметических инвариантов $(\rho_0\rho_1\rho_2; \sigma_1\sigma_2\sigma_3)$, где числа $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ означают последовательно ранг тривектора и ранги по одному из индексов специально введенных тензоров (комитантов).

Лонго провел классификацию соответствующих тривекторам линейных комплексов плоскостей, основываясь на понятиях особых точек, особых подпространств, ассоциированных с особыми точками, следами комплекса плоскостей и др. Классификация линейных комплексов плоскостей, проведенная Лонго, как оказалось, эквивалентна классификации тривекторов, проведенной Гуревичем. Согласно обеим классификациям имеется всего 23 попарно неэквивалентных типа тривекторов, ранг которых не превышает восьми, при этом 13 типов имеют ранг, равный восьми.

При построении геометрической конструкции линейных комплексов плоскостей, ассоциированных с каждым типом тривекторов, желательно иметь простые координатные симплексы, которые отличались бы друг от друга лишь транспозициями координатных гиперплоскостей. Предлагаемый нами метод позволяет найти такие преобразования координатных гиперплоскостей и, что более важно, найти все варианты канонических тривекторов, принадлежащих одному и тому же типу, и тем самым ликвидировать неоднозначность при их исследовании.

Постановка и описание задачи

Канонические виды всех 23 возможных типов тривекторов, ранг которых не превышает восьми, согласно [3] можно объединить в следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 W = & \alpha e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + \\
 & + \beta e^5 \wedge e^6 \wedge e^7 + \gamma e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + \\
 & + \delta e^2 \wedge e^4 \wedge e^6 + \varepsilon e^3 \wedge e^4 \wedge e^7 +
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$+\lambda e^2 \wedge e^7 \wedge e^8 + \mu e^3 \wedge e^6 \wedge e^8, \quad (1)$$

где \wedge – символ внешнего умножения в алгебре Грассмана; $e^i (i = \overline{1,8})$ – линейно независимые гиперплоскости аффинного или проективного пространства над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ и μ принимают значения из множества $\{0,1\}$. Десять типов канонических тривекторов, ранг которых меньше восьми, получаются из равенства (1) при $\lambda = \mu = 0$. Остальные 13 типов тривекторов имеют ранг, равный восьми. Для них коэффициент $\mu = 1$. Для тривекторов категории B (для них арифметический инвариант $\sigma_3 = 0$, коэффициент $\lambda = 0$, а для тривекторов категории A (для них $\sigma_3 \neq 0$) $\lambda = 1$.

Разложение (1) обладает тем свойством, что каждая пара слагаемых в его правой части имеет не более чем одну общую гиперплоскость данного базиса.

К исследованию канонических тривекторов с помощью теории графов нас натолкнула работа [2], в которой находятся и исследуются условия применимости к каноническим тривекторам т. н. *основного правила* для разыскания весовых коэффициентов различных сочетаний индексов для тривекторов любого ранга. Следуя [2], каждое отличное от нуля слагаемое в правой части равенства (1) назовем *листом* соответствующего канонического тривектора, и для краткости будем обозначать его через W_k , где k принимает одно из значений $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu$. Например, листы $e^1 \wedge e^4 \wedge e^5$ и $e^3 \wedge e^6 \wedge e^8$, входящие в каждый из 13 канонических тривекторов восьмого ранга, будут обозначаться соответственно через W_γ и W_μ , при этом $W_\gamma \cap W_\mu = \emptyset$. В общем случае каждому листу W_k отвечает сочетание T_k трех попарно различных индексов из множества $\{1, 2, \dots, r\}$, где r – ранг тривектора. При перестановке какой-либо пары индексов знак листа в силу косой симметрии меняется на противоположный. Для канонических тривекторов восьмого ранга минимальное число листов равно трем, максимальное – семи (см. [3, с. 71, 72]).

Поставим в соответствие каждому ка-

ноническому тривектору два неориентированных взаимно дополняющих друг друга графа G и \bar{G} следующим образом. Листам тривектора будут отвечать вершины графов G и \bar{G} . Пары листов, имеющих общую гиперплоскость, в основном графе G будет отвечать ребро, соединяющее соответствующие листам вершины. В дополнительном графе \bar{G} , наоборот, пары листов, не имеющих общей гиперплоскости, отвечает ребро, соединяющее вершины, соответствующие этим листам. Максимальное число ребер графа G $m = C_n^2 - 1$, где n – число его вершин. В силу того, что $W_\gamma \cap W_\mu = \emptyset$, случай $m = 0$ исключается. Полный граф канонического тривектора получается объединением $G \cup \bar{G}$ основного и дополнительного графов. Такое соответствие в общем случае не является функцией: нескольким каноническим тривекторам может отвечать один и тот же основной (а, следовательно, и дополнительный) граф с фиксированным числом вершин и ребер с точностью до изоморфизма, и существуют графы с заданным числом вершин и ребер, которым не соответствует ни один канонический тривектор [14]. Однако, как мы покажем ниже, все тривекторы, по крайней мере, восьмого ранга, интерпретируемые изоморфными графами, эквивалентны между собой, т. е. принадлежат одному и тому же типу. Этот факт означает, что существуют подстановки индексов, переводящие один канонический тривектор в другой.

Ранее в работах [4–13] и др., опираясь на инвариантные геометрические образы, найденные в работе [3], для всех тривекторов восьмого ранга нами были построены группы Ли линейных преобразований пространства тривектора, сохраняющих данный тривектор, его канонический вид и, как следствие, ассоциированный с ним линейный комплекс плоскостей. Эти группы мы назвали основными группами автоморфизмов соответствующих тривекторов.

Основной задачей настоящей работы является *нахождение всех вариантов канонических видов тривекторов восьмого ранга с помощью аппарата теории графов и групп подстановок.*

Изложение основных результатов

Обозначим для дальнейшего через n – число листов (вершин) дополнительного графа \bar{G} ; через m – число его ребер; x, y, z – индексы из множества $\{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \lambda\}$. Цикломатическое число графа \bar{G} будем вычислять по формуле $v(\bar{G}) = m(\bar{G}) - n(\bar{G}) + p(\bar{G})$, где p – число его связных компонент. Через U обозначим группу всех подстановок, переводящих канонические тривекторы друг в друга; через e – тождественную подстановку.

Зафиксировав вершины, отвечающие листам W_γ и W_μ , и перебирая подходящие наборы оставшихся листов с различными реберными связями между ними, будем последовательно рассматривать всевозможные попарно неизоморфные дополнительные графы с 3, 4, 5, 6 и 7 вершинами.

1. $n = 3$. В этом случае возможные значения для числа m : $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$. При $m > 3$ неизбежно будут повторяться ребра (т. е. в графе будут присутствовать параллельные ребра), что исключается в записи канонических тривекторов.

1.1 Конфигурация графа при $m = 0$ невозможна, поскольку листы W_γ и W_μ не имеют общих гиперплоскостей, и тогда добавленный лист W_x тоже не должен иметь общих гиперплоскостей с листами W_γ и W_μ . Из этого следует, что для канонического тривектора потребовалось бы девять линейно независимых гиперплоскостей, что невозможно (их максимальное число равно рангу тривектора и равно восьми).

1.2 Конфигурация графа при $m = 3$ также невозможна, т. к. в противном случае листы W_γ и W_μ имели бы общую гиперплоскость.

1.3 При $m = 1$ возможны два варианта: 1) добавляемый лист W_x имеет общую гиперплоскость с листом W_γ ; 2) добавляемый лист W_x имеет общую гиперплоскость с листом W_μ . При этом дополнительный граф имеет два ребра.

Конфигурация графа в первом варианте невозможна. Действительно, согласно этой конфигурации в качестве листа W_x должен быть взят один из оставшихся листов

$W_\alpha, W_\beta, W_\delta, W_\varepsilon, W_\lambda$, который с листом W_γ имеет общую гиперплоскость, а с листом W_μ не имеет общей гиперплоскости. Перебирая поочередно оставшиеся листы, мы видим, что

$$W_\alpha \cap W_\gamma = \{e^1\}, \quad W_\alpha \cap W_\mu = \{e^3\} \neq \emptyset;$$

$$W_\beta \cap W_\gamma = \{e^5\}, \quad W_\beta \cap W_\mu = \{e^6\} \neq \emptyset;$$

$$W_\delta \cap W_\gamma = \{e^4\}, \quad W_\delta \cap W_\mu = \{e^6\} \neq \emptyset;$$

$$W_\varepsilon \cap W_\gamma = \{e^4\}, \quad W_\varepsilon \cap W_\mu = \{e^3\} \neq \emptyset;$$

$$W_\lambda \cap W_\gamma \neq \emptyset, \quad W_\lambda \cap W_\mu = \{e^8\} \neq \emptyset.$$

Остается рассмотреть второй вариант. Поскольку в листах W_γ и W_μ участвуют гиперплоскости e^1, e^4, e^5, e^3, e^6 и e^7 , а в каноническом тривекторе должны участвовать все восемь гиперплоскостей, то в качестве листа W_x должен быть взят лист, содержащий гиперплоскости e^2 и e^7 . Среди таких листов имеется лишь один – это лист $W_\lambda = e^2 \wedge e^7 \wedge e^8$, который удовлетворяет конфигурации при $m = 1$ во втором варианте, т. к. $W_\gamma \cap W_\mu = \emptyset$, $W_\gamma \cap W_\lambda = \emptyset$, $W_\mu \cap W_\lambda = \emptyset$, $W_\lambda \cap W_\mu = \{e^8\} \neq \emptyset$. Таким образом, при $m = 1$ (или в дополнительном графе при $m = 2$) мы имеем единственный канонический тривектор $W = W_\lambda + W_\gamma + W_\mu$, представляющий тривектор типа (888; 411). Кстати, это единственный тривектор восьмого ранга, граф которого состоит из двух компонент связности (т. е. этот граф несвязный). Он также характеризуется еще и тем, что это единственный канонический тривектор, граф которого имеет цикломатическое число, равное нулю (как для основного, так и для дополнительного графа), т. е. основной граф является ациклическим.

2. $n = 4$. Возможное количество ребер соответствующего полного графа равно $m = C_4^2 = 6$. Случай полного графа невозможен (иначе все листы имели бы общую гиперплоскость; кроме того, как отмечалось выше, $W_\gamma \cap W_\mu = \emptyset$). Невозможен также случай всех изолированных вершин графа. Поэтому подлежат рассмотрению лишь значения $m = 1, m = 2, m = 3, m = 4$ и $m = 5$. Мы теперь должны найти два листа W_x и W_y так, чтобы выпол-



нялись соответствующие связи на графах. Покажем, что случай $m = 3$ невозможен. Поскольку лист W_μ связан ребрами со всеми остальными листьями, кроме листа W_γ , то для основных графов возможны лишь три конфигурации:

1) лист W_γ не связан с листом W_x , но связан с листом W_y . Тогда в качестве листа W_x можно взять лишь лист W_λ , а на место листа W_y остается четыре претендента: W_α , W_β , W_δ и W_ε . Но лист W_λ связан с каждым из этих листьев, в то время как этих связей быть не должно;

2) лист W_γ не связан с листьями W_x и W_y . В этом случае на роль листа W_x снова претендует только лист W_λ . Но тогда лист W_γ окажется связанным с каждым из оставшихся четырех листьев, которые претендуют на роль листа W_y , что также невозможно;

3) лист W_γ не связан ребром с листом W_y , но связан с листом W_x . Тогда на место листа W_y претендует лишь лист W_λ , который связан со всеми оставшимися листьями, что невозможно.

Остальные три конфигурации (их всего шесть) являются соответственно дополнительными графами к рассмотренным выше основным графам, поэтому на них переносятся те же рассуждения.

Перейдем к рассмотрению случаев $m = 1$ и $m = 2$. Двойственными к ним являются соответственно случаи $m = 5$ и $m = 4$. Поэтому достаточно рассмотреть первые два случая.

Пусть $m = 1$. На роль листьев W_x и W_y не может претендовать лист W_λ , т. к. он не связан с листом W_γ . Тогда на роль листьев W_x и W_y остается четыре претендента: W_α , W_β , W_δ и W_ε . При этом эти листья должны быть попарно связаны между собой. Но $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$, поэтому пара W_α и W_β отпадает. Поскольку листья W_x и W_y входят в основной граф симметрично, то следует рассмотреть пары (W_α, W_δ) , $(W_\alpha, W_\varepsilon)$, (W_β, W_δ) , (W_β, W_ε) , $(W_\delta, W_\varepsilon)$.

Пара (W_α, W_δ) (невозможна, т. к. в ней отсутствует гиперплоскость e^7). Невозможна также пара (W_β, W_δ) , т. к. в ней отсутствует гиперплоскость e^2 . Таким образом, мы имеем три возможности:

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\varepsilon,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\mu + W_\beta + W_\delta,$$

$$W^{(3)} = W_\gamma + W_\mu + W_\delta + W_\varepsilon,$$

или в бескоординатной форме

$$W^{(1)} = e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \wedge e^8 + e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4 \wedge e^7,$$

$$W^{(2)} = e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \wedge e^8 + e^5 \wedge e^6 \wedge e^7 + e^2 \wedge e^4 \wedge e^6,$$

$$W^{(3)} = e^1 \wedge e^4 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \wedge e^8 + e^2 \wedge e^4 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4 \wedge e^7.$$

Покажем, что графы тривекторов $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$ изоморфны и, следовательно, полученные канонические тривекторы эквивалентны. Последнее утверждение означает, что любой из них может быть переведен в другой с помощью некоторого невырожденного преобразования координатных гиперплоскостей e^1, e^2, \dots, e^8 в семимерном проективном пространстве. Действительно, подстановка $\varphi = (134658)(27)$, где числами 1, 2, ..., 8 обозначены номера гиперплоскостей, отображает $W^{(1)} \rightarrow W^{(3)}$, $W^{(3)} \rightarrow W^{(2)}$, а подстановка φ^2 отображает $W^{(1)} \rightarrow W^{(2)}$. Обратная подстановка производит обратные преобразования. При необходимости у некоторых гиперплоскостей следует поменять знак. Все три тривектора $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$ принадлежат типу $(863;100)$. Цикломатическое число соответствующих графов равно двум, что свидетельствует о наличии двух базисных циклов $(W_\gamma W_x W_y)$ и $(W_\mu W_x W_y)$ на этих графах.

Остается рассмотреть последний, третий случай при $n = 4$, $m = 2$. Здесь необходимо рассмотреть две конфигурации: 1) листья W_x и W_y связаны друг с другом, но не связаны с листьями W_γ и W_μ ; 2) листья W_x и W_y связаны друг с другом, связаны оба с листом W_μ , а лист W_y связан с листом W_γ (лист W_x не связан с листом W_γ).

1) По аналогии со случаем $m = 1$, найдем листья W_x и W_y , перебирая листья $W_\alpha, W_\beta, W_\delta$ и W_ε . Ясно, что на роль листьев W_x и W_y могут претендовать только листья W_α и W_β , т. к. кроме листьев W_γ и W_μ только эта пара

листов не имеет общих гиперплоскостей. Поэтому получаем единственный канонический тривектор $W = W_\alpha + W_\beta + W_\gamma + W_\mu$, принадлежащий типу (884;400). Цикломатическое число соответствующего графа равно единице, т. е. мы имеем один цикл, проходящий по одному разу через все вершины и все ребра. Получили *гамильтонов* граф, степень каждой вершины которого равна двум.

2) На роль листов W_x и W_y претендуют листы W_α , W_β , W_δ , W_ϵ и W_λ . Так как лист W_γ не должен иметь общей гиперплоскости с листом W_x , а с листом W_y должен иметь общую гиперплоскость и, кроме того, общую гиперплоскость должны иметь листы W_x и W_y , то в качестве листа W_x можно взять один из листов W_α , W_δ , и W_ϵ , а в качестве листа W_y — листы W_β и W_λ , при этом пару W_α и W_β следует исключить, как и пару W_β и W_ϵ . Таким образом, рассматриваемой конфигурации удовлетворяют четыре тривектора:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\lambda, \\ W^{(2)} &= W_\gamma + W_\mu + W_\delta + W_\lambda, \\ W^{(3)} &= W_\gamma + W_\mu + W_\epsilon + W_\lambda, \\ W^{(4)} &= W_\gamma + W_\mu + W_\beta + W_\lambda. \end{aligned}$$

Покажем, что графы этих тривекторов изоморфны и, следовательно, соответствующие тривекторы эквивалентны. Для этого рассмотрим подстановки

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1)(27)(36)(4)(5)(8), \\ \varphi_2 &= (14)(2)(36)(5)(7)(8), \\ \varphi_3 &= (14)(27)(3)(5)(6)(8), \\ \varphi_4 &= (1)(2)(36)(45)(7)(8), \\ \varphi_5 &= \varphi_1 \circ \varphi_4 = (1)(27)(3)(45)(6)(8). \end{aligned}$$

Тогда $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = \varphi_3^2 = \varphi_4^2 = \varphi_5^2 = e$ и $\varphi_1 : W^{(3)} \leftrightarrow W^{(4)}$; $\varphi_2 : W^{(1)} \leftrightarrow W^{(3)}$; $\varphi_3 : W^{(1)} \leftrightarrow W^{(4)}$; $\varphi_4 : W^{(2)} \leftrightarrow W^{(4)}$; $\varphi_5 : W^{(2)} \leftrightarrow W^{(3)}$.

Полагая



Рис. 1. Условное изображение дополнительного графа

$$\varphi_6 = \varphi_3 \circ \varphi_4 = (154)(27)(36)(8),$$

$$\varphi_7 = \varphi_4 \circ \varphi_3 = (145)(27)(36)(8),$$

получим $\varphi_6 : W^{(1)} \rightarrow W^{(2)}$, $\varphi_7 : W^{(2)} \rightarrow W^{(1)}$. Введем подстановки

$$\begin{aligned} \varphi_8 &= \varphi_1 \circ \varphi_6 = \varphi_2 \circ \varphi_4 = \\ &= \varphi_3 \circ \varphi_5 = (154)(2)(3)(6)(8)(7); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_7 &= \varphi_4 \circ \varphi_2 = \varphi_5 \circ \varphi_3 = \\ &= \varphi_7 \circ \varphi_1 = \varphi_6^2 = \varphi_8^2 = (145)(2)(3)(6)(7)(8); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \varphi_2 \circ \varphi_9 = \varphi_3 \circ \varphi_7 = \\ &= \varphi_4 \circ \varphi_8 = \varphi_5 \circ \varphi_6 = \varphi_6 \circ \varphi_3 = \\ &= \varphi_7 \circ \varphi_5 = \varphi_8 \circ \varphi_2 = (15)(2)(36)(4)(7)(8); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \varphi_1 \circ \varphi_{10} = \varphi_2 \circ \varphi_7 = \varphi_3 \circ \varphi_9 = \\ &= \varphi_4 \circ \varphi_6 = \varphi_5 \circ \varphi_8 = \varphi_6 \circ \varphi_2 = \\ &= \varphi_7 \circ \varphi_4 = \varphi_8 \circ \varphi_3 = \varphi_9 \circ \varphi_5 = \\ &= \varphi_{10} \circ \varphi_1 = (15)(27)(3)(4)(6)(8). \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что $\varphi_6 \circ \varphi_7 = \varphi_7 \circ \varphi_6 = \varphi_8 \circ \varphi_9 = \varphi_9 \circ \varphi_8 = \varphi_{10}^2 = \varphi_{11}^2 = e$. Легко проверить, что полученное множество из 12 подстановок с приведенным выше правилом умножения образует группу, которая является группой автоморфизмов рассматриваемой совокупности тривекторов. При этом подмножество H , состоящее из четырех подстановок $e, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, образует циклическую подгруппу четвертого порядка. Цикломатическое число графа рассматриваемого тривектора равно единице, поэтому этот граф имеет только один фундаментальный цикл $W_\delta W_\mu W_\lambda$ и одну висячую вершину W_γ . Все четыре канонических тривектора, как было показано выше, попарно эквивалентны между собой и принадлежат типу (888; 621).

3. $n = 5$. Максимально возможное число ребер графа $m = C_5^2 = 10$.

При этом, как и ранее, следует исключить случаи полного графа и всех изолированных вершин. Поэтому подлежат рассмотрению лишь значения $m = 1, 2, 3, 4, 5$, т. к. значения $m = 9, 8, 7$ являются двой-

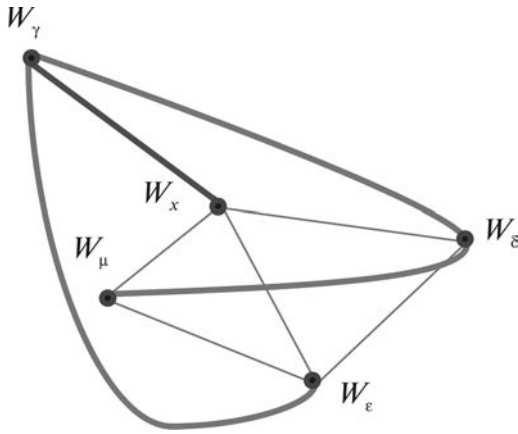


Рис. 2. Одно из остовных деревьев графа G

ственными соответственно значениям $m = 1, 2, 3$, а значение $m = 5$ является двойственным самому себе. Теперь мы должны найти три листа W_x, W_y и W_z так, чтобы выполнялись соответствующие связи на графах. На рис. 1 приведено условное изображение искомого дополнительного графа \bar{G} .

3.1 $m = 1$. Поскольку в каждый канонический тривектор должны входить листы W_γ и W_μ , то только эти листы могут быть соединены единственным ребром. Следовательно, на роль листов W_x, W_y и W_z могут претендовать лишь тройки $W_\alpha, W_\delta, W_\epsilon$ и $W_\delta, W_\epsilon, W_\beta$, так как из $C_5^3 = 10$ троек только две указанные тройки имеют по одной общей гиперплоскости как между собой, так и с листьями W_γ и W_μ . В остальных тройках найдется пара листов, не имеющих общей гиперплоскости. Таким образом, имеем два канонических тривектора:

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\delta + W_\epsilon,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\mu + W_\delta + W_\epsilon + W_\beta,$$

принадлежащие типу (874; 200). Остается найти подстановку φ , переводящую тривекторы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ друг в друга. Такой подстановкой является подстановка $\varphi = (15)(27)(36)(4)(8)$, при этом $\varphi^2 = e$. Получаем циклическую группу (e, φ) второго порядка. Цикломатическое число соответствующих графов равно пяти, что свидетельствует о наличии пяти базисных циклов в основном графе G . Для того чтобы

убедиться в этом, построим одно из остовных деревьев в графе G (на рис. 2 остовное дерево выделено жирными ребрами). В качестве листа W_x можно взять лист W_α или лист W_β .

Добавляя к остовному дереву по одному из оставшихся ребер, получим один из наборов базисных циклов: $(W_\gamma W_x W_\delta)$, $(W_\gamma W_x W_\mu W_\delta)$, $(W_\gamma W_x W_\epsilon)$, $(W_\gamma W_\delta W_\epsilon)$.

3.2 $m = 2$ (двойственное значение $m = 8$). Как видно из рис. 3, в этом случае возможны лишь две конфигурации с двумя ребрами a и b . Рассмотрим каждую из них.

3.2 a – На роль листов W_x и W_y могут претендовать из оставшихся четырех листов из шести возможных пар только пять пар: (W_α, W_δ) , (W_α, W_ϵ) , (W_β, W_δ) , (W_β, W_ϵ) , (W_δ, W_ϵ) . Пара (W_α, W_β) не подходит, так как $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$, и мы имели бы три ребра, что невозможно по условию выбора числа m . Таким образом, для рассматриваемого случая мы имеем пять канонических тривекторов:

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\alpha + W_\delta,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\alpha + W_\epsilon,$$

$$W^{(3)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\beta + W_\delta,$$

$$W^{(4)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\beta + W_\epsilon,$$

$$W^{(5)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\delta + W_\epsilon.$$

Рассмотрим подстановку $\varphi_1 = (1)(23)(4)(5)(67)(8)$. Очевидно, что $\varphi_1^{-1} = \varphi_1$. Эта подстановка отображает $W^{(1)} \leftrightarrow W^{(2)}$, $W^{(3)} \leftrightarrow W^{(4)}$, $W^{(5)} \leftrightarrow W^{(5)}$. В первых двух случаях надо поменять знаки у гиперплоскостей e^4 и e^8 на

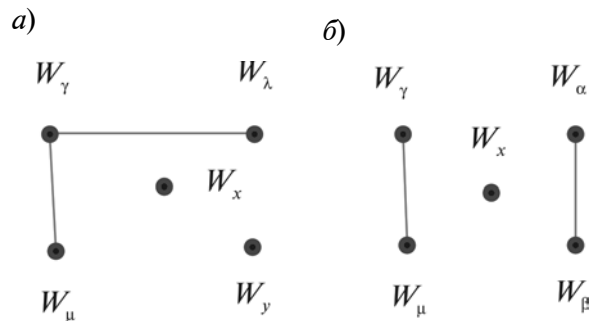


Рис. 3. Дополнительные графы для $n = 5, m = 2$

противоположный знак. Подстановка $\varphi_2 = (15)(27)(36)(4)(8)$ также совпадает со своей обратной и отображает $W^{(1)} \leftrightarrow W^{(4)}$, $W^{(2)} \leftrightarrow W^{(3)}$, $W^{(5)} \leftrightarrow W^{(5)}$. Подстановка $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 = (15)(26)(37)(4)(8)$ отображает $W^{(1)} \leftrightarrow W^{(3)}$, $W^{(2)} \leftrightarrow W^{(4)}$, $W^{(5)} \leftrightarrow W^{(5)}$ ($\varphi_3^{-1} = \varphi_3$). Наконец, $\varphi_1 \circ \varphi_3 = \varphi_3 \circ \varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_2 \circ \varphi_3 = \varphi_3 \circ \varphi_2 = \varphi_1$. Таким образом, множество подстановок $\{e, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ образует коммутативную инволютивную циклическую группу четвертого порядка, которая отображает тривекторы $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(3)}$ и $W^{(4)}$ друг в друга, а каждая из подстановок этой группы отображает тривектор $W^{(5)}$ в себя, т. е. оставляет его неподвижным. Остается найти хотя бы одну подстановку, переводящую тривектор $W^{(5)}$ хотя бы в один из тривекторов $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, $W^{(4)}$. Тем самым мы доказали бы изоморфизм соответствующих графов и эквивалентность всех пяти тривекторов, принадлежащих типу (888; 741). Сложность нахождения такой подстановки вызвана следующим обстоятельством. Запишем в виде таблицы ранг каждой гиперплоскости, входящей в тот или иной канонический тривектор.

Из табл. 1 видно, что гиперплоскость e^4 входит три раза только в тривектор $W^{(5)}$. В этом и состоит трудность нахождения подстановки, переводящей тривектор в какой-либо другой тривектор. Из этого факта можно заключить, что тривектор $W^{(5)}$ не эквивалентен ни одному из тривекторов $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, $W^{(4)}$. Следовательно, граф тривектора $W^{(5)}$ не изоморфен ни одному из графов, соответствующих тривекторам $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, $W^{(4)}$, хотя все графы имеют одно и то же цикломатическое число, равное четырем. Построив остов-

ное дерево для графа, изображенного на рис. 3 а, получим четыре фундаментальных цикла: $(W_\gamma W_x W_y)$, $(W_\gamma W_x W_\lambda W_y)$, $(W_\gamma W_y)$ и $(W_\gamma W_x W_\lambda W_\mu W_y)$.

Вычисляя арифметические инварианты σ_1 , σ_2 и σ_3 для тривектора $W^{(5)}$, убеждаемся, что этот тривектор принадлежит типу (888; 822).

3.2 б – Очевидно, что на роль листа W_x могут претендовать лишь листы W_δ и W_ε (лист W_λ не может претендовать на роль листа W_x , т. к. тогда появилось бы еще одно ребро). Поэтому здесь имеем два канонических тривектора:

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\beta + W_\delta,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\mu + W_\beta + W_\alpha + W_\varepsilon,$$

принадлежащие типу (886; 410).

Инволютивная подстановка $\varphi = (15)(27)(36)(4)(8)$ переводит тривекторы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ друг в друга. Цикломатическое число для соответствующего графа $\nu(G) = 4$, что свидетельствует о наличии четырех фундаментальных циклов в этом графе: $(W_\alpha W_\mu W_\beta W_\gamma)$, $(W_\alpha W_\gamma W_\beta W_x)$, $(W_\alpha W_\gamma W_x)$ и $(W_\alpha W_x W_\mu)$.

3.3 $m = 3$ (двойственное значение $m = 7$). Здесь имеется единственная возможность для канонического тривектора

$$W = W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\beta + W_\lambda,$$

принадлежащего типу (888; 873). Цикломатическое число соответствующего основного графа $\nu(G) = 3$, что свидетельствует о наличии трех фундаментальных циклов в этом графе: $(W_\alpha W_\lambda W_\mu)$, $(W_\alpha W_\gamma W_\beta W_\lambda)$, $(W_\alpha W_\gamma W_\beta W_\mu)$.

3.3 Значения $m = 4$ и $m = 5$ невозможны, поскольку максимально возможное

Таблица 1

Ранги гиперплоскостей, входящих в канонические тривекторы

	e^1	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7	e^8
$W^{(1)}$	1	3	2	2	1	2	1	2
$W^{(2)}$	2	2	3	2	1	1	2	2
$W^{(3)}$	1	2	1	2	2	3	2	2
$W^{(4)}$	1	1	2	2	2	2	3	2
$W^{(5)}$	1	2	2	3	1	2	2	2



количество ребер в дополнительном графе $m = 3$.

4. $n = 6$. Сразу отбрасываем значения $m = 0$ (полный граф), $m = 4$, $m = 5$ и их дополнения $m = 10$, $m = 6$, $m = 5$. Остается рассмотреть случаи $m = 1$ (дополнение $m = 9$), $m = 2$ (дополнение $m = 8$) и $m = 3$ (дополнение $m = 7$).

4.1 $m = 1$. Этот случай отпадает. Действительно, листья W_γ и W_μ должны присутствовать обязательно. На оставшиеся четыре места претендует $C_5^4 = C_5^1 = 5$ четверок: $(W_\alpha W_\beta W_\lambda W_\delta)$, $(W_\alpha W_\beta W_\lambda W_\varepsilon)$, $(W_\alpha W_\beta W_\delta W_\varepsilon)$, $(W_\alpha W_\lambda W_\delta W_\varepsilon)$, $(W_\beta W_\lambda W_\delta W_\varepsilon)$. Ни одна из этих четверок не подходит, т. к. образуется еще одно ребро: либо (W_α, W_β) (первые три четверки), либо (W_γ, W_λ) (оставшиеся две четверки).

4.2 $m = 2$. Здесь возможны два варианта, показанные на рис. 4 а и б.

4.2 а – На роль листьев W_x , W_y , W_z претендуют $C_4^3 = C_4^1 = 4$ тройки листьев: $(W_\alpha W_\beta W_\delta)$, $(W_\alpha W_\beta W_\varepsilon)$, $(W_\alpha W_\delta W_\varepsilon)$, $(W_\beta W_\delta W_\varepsilon)$. Первые две тройки отпадают, т. к. $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ и мы имели бы три ребра на графе. Остаются две последние возможности, которые дают два канонических тривектора:

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\lambda + W_\mu + W_\alpha + W_\delta + W_\varepsilon,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\lambda + W_\mu + W_\beta + W_\delta + W_\varepsilon.$$

Подстановка $\varphi = (15)(27)(36)(4)(8)$ отображает эти тривекторы друг в друга (ср. случай 3.2 б). Имеем инволютивную циклическую группу второго порядка. Тривекторы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ принадлежат типу (888; 852). Цикломатическое число соответству-

ющего основного графа $v(G) = 8$, что свидетельствует о наличии в этом графе восьми фундаментальных циклов: $(W_\gamma W_\varepsilon W_\lambda W_\delta)$, $(W_\mu W_\delta W_\lambda)$, $(W_\gamma W_x W_\lambda W_\varepsilon)$, $(W_\lambda W_\delta W_\varepsilon)$, $(W_x W_\lambda W_\delta)$, $(W_x W_\lambda W_\varepsilon)$, $(W_x W_\lambda W_\mu)$, $(W_\mu W_\lambda W_\varepsilon)$.

4.2 б – На роль листьев W_x и W_y могут претендовать только листья W_δ и W_ε (лист W_λ не может быть задействован, т. к. $W_\lambda \cap W_\gamma = \emptyset$ и мы имели бы на графе не два, а три ребра). Таким образом, в этом случае получается лишь один канонический тривектор $W = W_\gamma + W_\mu + W_\alpha + W_\beta + W_\delta + W_\varepsilon$, принадлежащий типу (887; 520). Здесь, как и в предыдущем случае, в соответствующем основном графе имеется восемь фундаментальных циклов ($v(G) = 8$): $(W_\gamma W_\alpha W_\delta)$, $(W_\gamma W_\alpha W_\varepsilon)$, $(W_\alpha W_\delta W_\mu)$, $(W_\alpha W_\delta W_\varepsilon)$, $(W_\mu W_\alpha W_\varepsilon)$, $(W_\gamma W_\alpha W_\varepsilon W_\beta)$, $(W_\gamma W_\alpha W_\mu W_\beta)$, $(W_\gamma W_\alpha W_\delta W_\beta)$.

4.3 $m = 3$. На роль листа W_x претендуют листья W_δ и W_ε . В соответствии с этим имеем два канонических тривектора

$$W^{(1)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\alpha + W_\beta + W_\varepsilon,$$

$$W^{(2)} = W_\gamma + W_\mu + W_\lambda + W_\alpha + W_\beta + W_\delta.$$

Тривекторы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ переводятся друг в друга инволютивной подстановкой $\varphi = (1)(23)(4)(5)(67)(8)$ и принадлежат типу (888; 885). Цикломатическое число соответствующего основного графа $v(G) = 7$ и граф имеет семь фундаментальных циклов: $(W_\mu W_\alpha W_\lambda)$, $(W_\alpha W_\lambda W_x)$, $(W_\mu W_\alpha W_x)$, $(W_\mu W_\alpha W_x W_\beta)$, $(W_\gamma W_\alpha W_x W_\beta)$, $(W_\gamma W_\alpha W_x)$, $(W_\mu W_\alpha W_\gamma)$.

5. $n = 7$. Здесь $m = 3$, $v(G) = 12$ и мы имеем единственный канонический тривектор

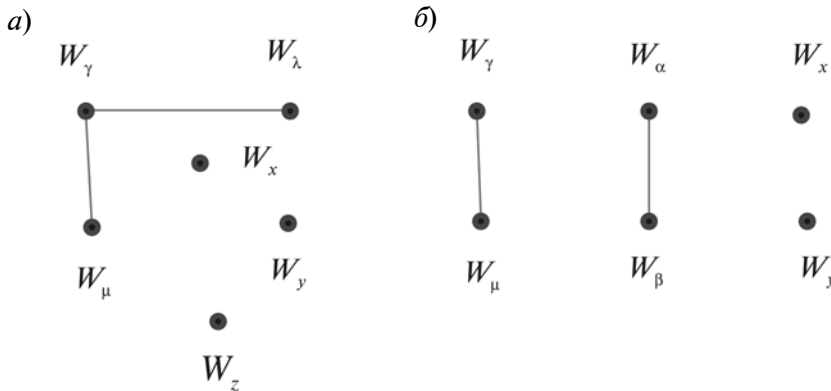


Рис. 4. Дополнительные графы для $n = 6$, $m = 2$

Таблица 2

Сводная таблица результатов исследований

Тип тривектора	$v(G)$	Количество канонических тривекторов	Количество листов	Порядок группы подстановок
(863; 100)	2	3	4	2
(874; 200)	5	2	5	2
(884; 400)	1	1	4	-
(886; 410)	4	2	5	2
(887; 520)	8	1	6	-
(888; 411)	0	1	3	-
(888; 621)	1	4	4	4
(888; 741)	4	4	5	4
(888; 822)	4	1	5	-
(888; 852)	8	2	6	2
(888; 873)	3	1	5	-
(888; 885)	7	2	6	2
(888; 888)	12	1	7	-

$W = W_\alpha + W_\beta + W_\gamma + W_\delta + W_\epsilon + W_\lambda + W_\mu$, принадлежащий общему типу (888; 888).

Случаем $n = 7$ завершается исследование всех тринадцати канонических тривекторов восьмого ранга.

Результаты исследований можно представить в виде сводной таблицы.

Анализируя данные табл. 2, можно сделать следующие выводы:

из тринадцати канонических типов тривекторов восьмого ранга шесть типов пред-

ставляются однозначно с точностью до групп Ли линейных преобразований;

в случаях, когда имеется несколько канонических тривекторов для одной и той же конфигурации вершин и ребер графа, найдены группы подстановок индексов, отображающие попарно один тривектор на другой, тем самым устанавливая изоморфизм соответствующих графов;

найжены фундаментальные циклы всех графов, при этом оказалось, что лишь один граф ациклический.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич, Г.Б. Алгебра тривектора. Ч. II [Текст] / Г.Б. Гуревич // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. —М.: МГУ, 1948. — Вып. 6. —С. 28–124.
2. Гуревич, Г.Б. О некоторых линейных операторах, связанных с тривектором [Текст] / Г.Б. Гуревич // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. —М.: МГУ, 1978. — Вып. XVIII. —С. 176–196.
3. Макоха, А.Н. Особые точки тривекторов восьмого ранга в P_7 [Текст] / А.Н. Макоха //Сб. Геометрия погруженных многообразий. —М., 1972. —С. 69–97.

4. Макоха, А.Н. Геометрия тривектора типа (863; 100) [Текст] / А.Н. Макоха //Сб. Геометрия однородных пространств. —М., 1976. —С. 34–45.
5. Макоха, А.Н. Линейные преобразования, сохраняющие тривектор типа (874; 200) [Текст] / А.Н. Макоха //Сб. Геометрия погруженных многообразий. —М., 1979. —С. 62–66.
6. Макоха, А.Н. Линейный комплекс плоскостей, ассоциированный с тривектором типа (886; 410) [Текст] / А.Н. Макоха //Сб. Современная геометрия. —Л., 1980. —С. 44–63.

7. **Макоха, А.Н.** Линейные операторы, связанные с тривектором типа (887; 520), и основная группа автоморфизмов этого тривектора [Текст] / А.Н. Макоха // Изв. вузов. Матем. —1981. —№ 7. —С. 46–63.

8. **Макоха, А.Н.** Группа автоморфизмов комплекса плоскостей типа A_6 и его геометрическая конструкция [Текст] / А.Н. Макоха // Изв. вузов. Матем.; рук. деп. в ВИНТИ; № 2119-92 ДЕП. — Казань, 1982. —16 с.

9. **Макоха, А.Н.** Группа автоморфизмов линейного комплекса плоскостей типа A_3 и особые прямые этого комплекса [Текст] / А.Н. Макоха // Изв. вузов. Матем. —1986. —№ 8. —С. 40–46.

10. **Макоха, А.Н.** Группа автоморфизмов линейного комплекса плоскостей типа A_4 [Текст] / А.Н. Макоха // Изв. вузов. Матем.; рук. деп. в ВИНТИ; № 8966-В87. —1987. —12 с.

11. **Макоха, А.Н.** Группа линейных преобразований, сохраняющих тривектор типа

(888; 852) [Текст] / А.Н. Макоха // Изв. вузов. Матем. —1988. —№ 2. —С. 45–49.

12. **Макоха, А.Н.** Линейный комплекс плоскостей общего типа категории A [Текст] / А.Н. Макоха // Вестник СГПУ. Естественные науки. —Ставрополь: Изд-во СГПУ, 1995. — Вып. 2. —С. 91–94.

13. **Макоха, А.Н.** Группы автоморфизмов тривекторов восьмого ранга [Текст] / А.Н. Макоха // Международная геометрическая школа-семинар памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. —Абрау-Дюрсо: Изд-во РГУ, 1996. —С. 50–51.

14. **Макоха, А.Н.** Интерпретация канонических тривекторов на графах [Текст] / А.Н. Макоха // Труды участников Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. —Абрау-Дюрсо: Изд-во РГУ, 2002. — С. 47–49.

15. **Longo, C.** Sui complessi lineari di piani [Text] / C. Longo // Ann. mat. pura ed appl. —1954. —№ 37 (4). —P. 61–138.

REFERENCES

1. **Gurevich G.B.** Algebra trivektora. Ch. II / Trudy seminarov po vekt. i tenz. analizu. —Moscow: MGU, 1948. — Vyp. 6. —S. 28–124. (rus)

2. **Gurevich G.B.** O nekotorykh lineinykh operatorakh, svyazannykh s trivektorom / Trudy seminarov po vekt. i tenz. analizu. Vyp. XVIII. —Moscow: MGU, 1978. —S. 176–196. (rus)

3. **Makokha A.N.** Osobyie tochki trivektorov vos'mogo ranga v P_7 / Sb. Geometriia pogruzhennykh mnogoobrazii. —Moscow, 1972. —S. 69–97. (rus)

4. **Makokha A.N.** Geometriia trivektora tipa (863; 100) / Sb. Geometriia odnorodnykh prostranstv. —Moscow, 1976. —S. 34–45. (rus)

5. **Makokha A.N.** Lineinye preobrazovaniia, sokhraniayushchie trivektor tipa (874; 200) / Sb. Geometriia pogruzhennykh mnogoobrazii. —Moscow, 1979. —S. 62–66. (rus)

6. **Makokha A.N.** Lineinyi kompleks ploskosti, assotsirovannyi s trivektorom tipa (886; 410) / Sb. Sovremennaya geometriia. —Leningrad, 1980. —S. 44–63. (rus)

7. **Makokha A.N.** Lineinye operatory, svyazannye s trivektorom tipa (887; 520), i osnovnaya gruppa avtomorfizmov etogo trivektora / Izv. vuzov. Matem. —1981. —№ 7. —S. 46–63. (rus)

8. **Makokha A.N.** Gruppa avtomorfizmov kompleksa ploskosti tipa A_6 i ego geometricheskaya konstruktsiia / Izv. vuzov. Matem. ruk. dep. v VINITI;

№ 2119-92 DEP. — Kazan', 1982. —16 s. (rus)

9. **Makokha A.N.** Gruppa avtomorfizmov lineinogo kompleksa ploskosti tipa A_3 i osobyie priamye etogo kompleksa / Izv. vuzov. Matem. —1986. —№ 8. —S. 40–46. (rus)

10. **Makokha A.N.** Gruppa avtomorfizmov lineinogo kompleksa ploskosti tipa A_4 / Izv. vuzov. Matem.; ruk. dep. v VINITI; № 8966-В87; 1987. —12 s. (rus)

11. **Makokha A.N.** Gruppa lineinykh preobrazovaniy, sokhraniayushchikh trivektor tipa (888; 852) / Izv. vuzov. Matem. —1988. —№ 2. —S. 45–49. (rus)

12. **Makokha A.N.** Lineinyi kompleks ploskosti obshchego tipa kategorii A / Vestnik SGPU. Estestvennyye nauki. —Stavropol': Izd-vo SGPU. —1995. —Vyp. 2. —S. 91–94. (rus)

13. **Makokha A.N.** Gruppy avtomorfizmov trivektorov vos'mogo ranga / Mezhdunarodnaya geometricheskaya shkola-seminar pamiati N.V. Efimova. Tezisy dokladov. —Abrau-Diurso: Izd-vo RGU, 1996. —S. 50–51. (rus)

14. **Makokha A.N.** Interpretatsiia kanonicheskikh trivektorov na grafakh / Trudy uchastnikov Mezhdunarodnoi shkoly-seminara po geometrii i analizu pamiati N.V. Efimova. — Abrau-Diurso: Izd-vo RGU, 2002. — S. 47–49. (rus)

15. **Longo C.** Sui complessi lineari di piani / Ann. mat. pura ed appl. —1954. —№ 37 (4). —P. 61–138.

МАКОХА Анатолий Николаевич — доцент кафедры прикладной математики и компьютерных технологий Северо-Кавказского федерального университета, кандидат физико-математических наук.

355029, Россия, г. Ставрополь, пр. Кулакова, д. 2.

E-mail: anmakoha@mail.ru

МАКОНА, Anatoliy N. *North-Caucasian Federal University.*

355029, prosp. Kulakova 2, Stavropol, Russia.

E-mail: anmakoha@mail.ru