

УДК 519.876.5 + 681.5.015.87

В.С. Кедрин, О.В. Кузьмин

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОЦЕНКИ ЧИСЛЕННОГО РАНГА

V.S. Kedrin, O.V. Kuzmin

FREQUENCY ANALYSIS OF TIME SERIES PERIODIC FUNCTIONS BY MEANS ASSESSMENT OF THE NUMBER OF RANKS

Рассмотрены особенности применения метода сингулярного анализа для временных рядов, образованных аддитивной периодической функцией. Предложена методика исследования динамических свойств системы на основании оценки численного ранга.

ВРЕМЕННОЙ РЯД. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ЧИСЛЕННЫЙ РАНГ. ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ.

The article describes the features of the method of analysis for singular time series formed additive periodic. Proposed a method research of dynamic properties of the system based on the evaluation of the numerical rank.

TIME SERIES. PERIODIC FUNCTIONS. SINGULAR VALUE DECOMPOSITION. NUMERICAL RANK. FREQUENCY ANALYSIS.

Задача идентификации параметров функции, описывающей развитие сложного процесса, является существенно важной в рамках теории динамических систем. В случае регистрации этих параметров с постоянным шагом τ по времени в виде совокупности временных рядов

$$t_i = t_0 + (i - 1)\tau : y_i = y(t_i), \quad i = \overline{1, N},$$

указанная задача является сложной и многовариантной при отсутствии для их объяснения функциональной модели системы динамических уравнений. Данная проблема имеет место для многих сложных реальных систем, т. к. получение систем динамических уравнений в этом случае связано со значительными трудностями при большом количестве переменных (динамической размерности системы), либо

практически невозможно в силу их многосвязности и многосложности. Поэтому возникает необходимость развития современных методов обработки временных выборок с целью формирования приближенной оценки параметров идентификации динамики системы. Указанное требование особенно актуально в условиях развития современных систем мониторинга в режиме реального времени.

Постановка задачи

В работе [1] определены инвариантные (определяемые видом модели, а не ее числовыми параметрами) аналитические зависимости исследования временной (пространственной) выборки, порождаемой периодической функцией вида

$$f(x) = A \cos(\alpha x + \varphi) + B \sin(\alpha x + \varphi), \quad (1)$$

а также аддитивной комбинации данной функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^I (A_i \cos(\alpha_i x + \varphi) + B_i \sin(\alpha_i x + \varphi)) \quad (2)$$

с помощью применения одного из современных дискретных методов – сингулярного анализа [2].

Данные зависимости получены на базе оценки $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$, т. н. численного ε -ранга матрицы \mathbf{A} , характеризующего такое количество сингулярных чисел s_j , которое с допустимой погрешностью ε определяет близость траекторной матрицы \mathbf{A} (см. [3, 4]) к матрице \mathbf{B} меньшего ранга $\text{rank}(\mathbf{B})$. Таким образом, определение численного (сингулярного) ранга r позволяет выявлять скрытые (латентные) внутренние взаимосвязи между элементами матрицы \mathbf{A} , что характеризует динамику исследуемой временной (пространственной) выборки процесса: число степеней свободы, порождающей его системы, или число переменных, определяющих фазовое состояние этой системы.

Выделенные в работе [1] ключевые зависимости численного ε -ранга $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ от количества составляющих сложной гармонической функции вида (2), представляют интерес для разработки новой методологии оперативного анализа состояния динамической системы, что особенно актуально для мониторинга параметров управления в режиме реального времени сложных структурно-неустойчивых систем. В данной работе ставится задача создания методики анализа параметров исследуемой временной (пространственной) выборки процесса, имеющей ярко выраженный периодический характер, на базе оценки численного ε -ранга.

Методика определения частот периодических компонент на основании численного ранга

Выявленные в статье [1] свойства инвариантности численного ε -ранга $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ относительно значений частот аддитивных составляющих $\forall a_i \neq \pi k, k \in \mathbb{N}$ и его пропорциональной зависимости от количества I периодических компонент при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$ для временных рядов, порождаемых пе-

риодической функцией вида (2), позволяют создать метод анализа частот (спектра) по исходной дискретной выборке временного ряда. Идея предлагаемого метода основана на принципе активной идентификации системы, когда используются специально выбранные тестовые сигналы и изучается влияние состояния системы на фиксированное воздействие. Применительно к контексту решаемой задачи авторы предлагают рассматривать изменение $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ траекторной матрицы \mathbf{A} временного ряда, образованного сложением отсчетов исходного ряда и простейшей тестовой периодической компоненты заданной частоты:

$$f_T(x) = A_T \cos(\alpha_T x + \varphi) + B_T \sin(\alpha_T x + \varphi).$$

В случае «воздействия» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты α_T , не присутствующей в исходном временном ряду ($\forall a_i : a_i \neq \alpha_T$), будет наблюдаться увеличение $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ в силу свойства его пропорциональной зависимости от количества I периодических компонент при $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_I$.

При «воздействии» на исходную временную выборку тестовой компоненты частоты α_T , присутствующей в исходном временном ряду ($\forall a_i : a_i = \alpha_T$), в силу свойств инвариантности относительно значений частот аддитивных составляющих $\forall a_i \neq \pi k, k \in \mathbb{N}$ и дистрибутивности $\text{rank}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ останется неизменным:

$$\begin{aligned} f(x) &= \{A_i \cos(\alpha_i x + \varphi) + B_i \sin(\alpha_i x + \varphi)\} + \\ &+ \{A_T \cos(\alpha_T x + \varphi) + B_T \sin(\alpha_T x + \varphi)\} = \\ &= (A_i + A_T) \cos(\alpha_i x + \varphi) + \\ &+ (B_i + B_T) \sin(\alpha_i x + \varphi), \forall a_i : a_i = \alpha_T. \end{aligned}$$

Сформулированная идея легла в основу создания итерационного алгоритма определения частот компонент периодических составляющих (спектра), присутствующих в исходном временном ряду, порождаемом периодической функцией вида (2) (рис. 1).

Исходными данными для алгоритма служат:

выборка исходного временного ряда y , порождаемого периодической функцией вида (2);

диапазон частот $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$, в котором

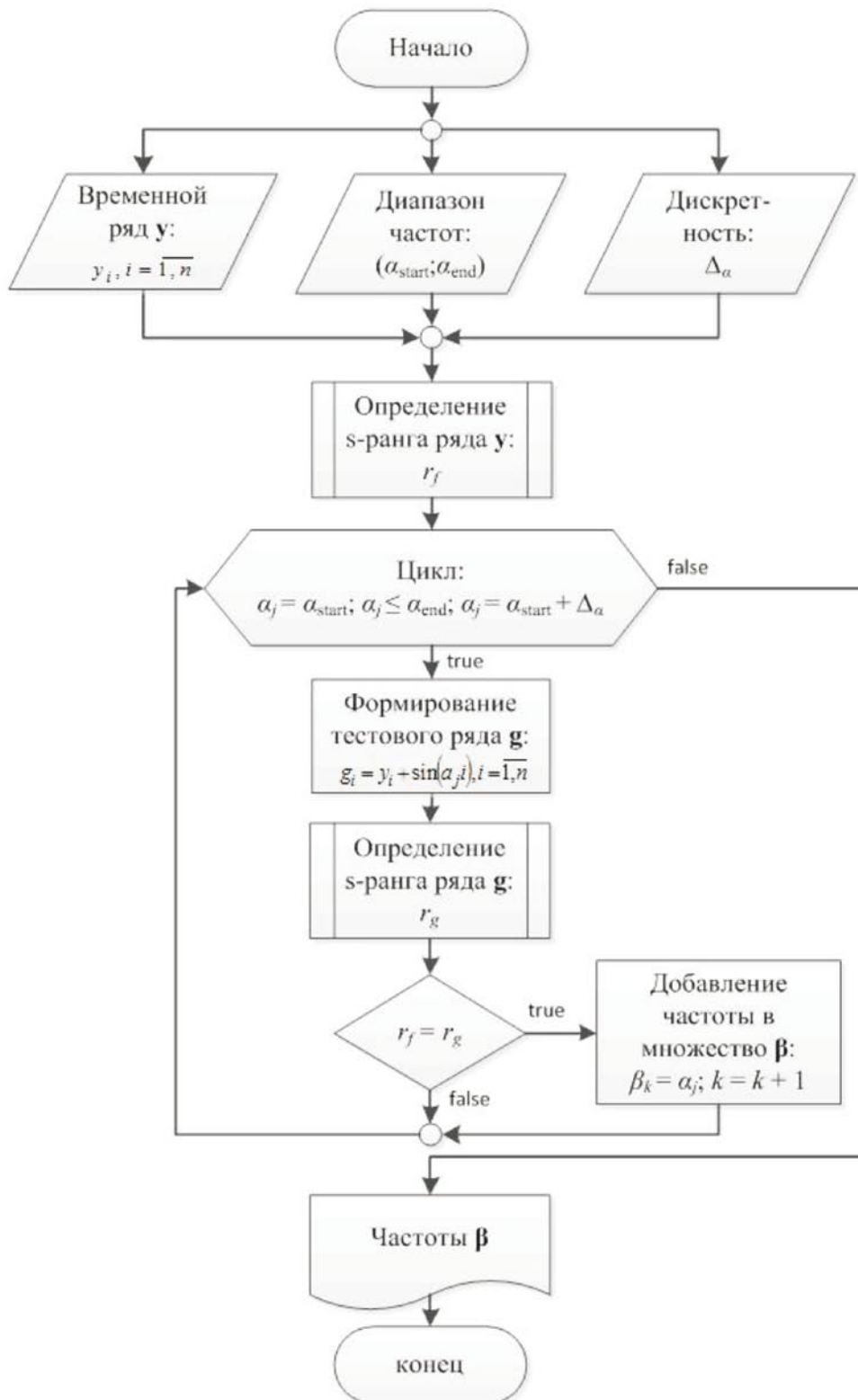


Рис. 1. Алгоритм определения частот периодических компонент

будет производиться поиск частот периодических составляющих, входящих в исходный ряд;

дискретность Δ_α , разбивающая диапазон $(\alpha_{\text{start}}; \alpha_{\text{end}})$ на l отсчетов:

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha_{\text{start}} - \alpha_{\text{end}}}{l}.$$

Особенности определения численного ϵ -ранга

В алгоритме, представленном в предыдущем разделе, центральное место занимает определение численного ϵ -ранга $\text{rank}(A, \epsilon)$, основанное на выделении области значений $\text{range}(A)$ и нуль-пространства $\text{null}(A)$ матрицы A .

Представляет интерес определение критерия данного разделения. Интерпретация метода сингулярного разложения определяет, что разделение областей $\text{range}(A)$ и $\text{null}(A)$ может быть основано на исследовании динамики сингулярных чисел, последовательность которых расположена в порядке убывания модуля на главной диагонали матрицы S (см. [1, 2]).

В качестве иллюстрации сказанного выше приведем результаты анализа выборки сингулярных чисел, полученной в результате сингулярного разложения временного ряда, образованного функцией вида

$$f(i) = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i), i = \overline{1; 51} \quad (3)$$

с параметром разложения $m = 21$ (табл. 1).

Из таблицы видно, что наиболее простым и очевидным критерием разделения областей $\text{range}(A)$ и $\text{null}(A)$ может служить величина абсолютной погрешности ϵ_s ,

выше которой сингулярные числа являются значимыми и попадают в область значений $\text{range}(A)$. В противном случае сингулярные числа являются незначимыми и характеризуют область $\text{null}(A)$. Так, при $\epsilon_s = 0,01$ видно, что первые четыре сингулярных числа являются значимыми, следовательно, $\text{rank}(A, \epsilon) = 4$.

В свою очередь сингулярные числа, определяющие $\text{null}(A)$, отличны от нуля и характеризуются определенной динамикой. Принятие малых ненулевых значений можно объяснить неравномерностью дискретных отсчетов, особенностями дискретного алгоритма сингулярного анализа, а также конечной точностью применяемых в ходе расчета переменных. Поэтому величина абсолютной погрешности численного ϵ -ранга ϵ_s не является достаточно гибким критерием разделения областей $\text{range}(A)$ и $\text{null}(A)$. Это легко показать, если изменить выборку исходного периодического ряда (3), прибавив еще одну компоненту близкой частоты к имеющейся в исходном ряду:

$$f(i) = 0,1 \sin(i) + 0,2 \cos(2i) + \sin(0,99i), i = \overline{1; 51}. \quad (4)$$

Выборка сингулярных чисел, полученных в результате сингулярного разложения ряда (4), представлена в табл. 2.

При выборе $\epsilon_s = 0,01$ видно, что первые четыре сингулярных числа являются значимыми, следовательно, $\text{rank}(A, \epsilon) = 4$, что не согласуется с представленной моделью функции (4), имеющей три периодических компоненты. Нетрудно заметить, что пятое

Таблица 1

Выборка сингулярных чисел

i	s_i	i	s_i	i	s_i
1	2,64515	8	3,13E-08	15	1,90E-08
2	2,46369	9	3,03E-08	16	1,64E-08
3	1,30862	10	2,92E-08	17	1,58E-08
4	1,22877	11	2,71E-08	18	1,42E-08
5	3,93E-08	12	2,18E-08	19	1,27E-08
6	3,84E-08	13	2,06E-08	20	1,25E-08
7	3,25E-08	14	2,02E-08	21	8,97E-09

Таблица 2

Выборка сингулярных чисел

i	s_i	i	s_i	i	s_i
1	14,5026	8	2,01E-07	15	8,79E-08
2	13,4774	9	1,62E-07	16	8,35E-08
3	2,63163	10	1,54E-07	17	7,43E-08
4	2,44769	11	1,40E-07	18	7,15E-08
5	0,0069	12	1,27E-07	19	6,06E-08
6	5,47E-03	13	1,09E-07	20	5,93E-08
7	2,69E-07	14	1,05E-07	21	4,80E-08

и шестое сингулярные числа хотя и принимают малые значения, но, тем не менее, отличаются на пять порядков от идущих далее сингулярных чисел. В связи с этим необходим выбор более гибкого критерия разделения областей $\text{range}(\mathbf{A})$ и $\text{null}(\mathbf{A})$. С этой целью предлагаем использование относительных моментных коэффициентов динамики – обратного цепного коэффициента роста:

$$Ks_i = \frac{s_{i+1}}{s_i}, \quad (5)$$

т. к. сингулярные числа s_i расположены в порядке убывания.

На основании коэффициента (5) можно определить точки разрыва в динамике выборки сингулярных чисел. Расчет моментных показателей обратного коэффициента роста для выборки сингулярных чисел, образованных в результате сингулярного разложения функции (4), представлен в табл. 3.

В случае графического представления изменения динамики сингулярных чисел

на основании показателя обратного коэффициента роста (рис. 3) целесообразно воспользоваться логарифмической шкалой:

$$\ln(Ks_i) = \ln\left(\frac{s_{i+1}}{s_i}\right),$$

т. к. точки перехода (разрыва) динамики могут принимать достаточно большие значения и существенно отличаются друг от друга.

Из рис. 2 видно, что динамика сингулярных чисел для ряда (4) имеет три точки разрыва, которые можно интерпретировать следующим образом:

первые две точки разрыва (между третьим – вторым и четвертым – пятым сингулярными числами соответственно) характеризуют отделение трех периодических компонент друг от друга;

третья точка разрыва (между шестым и седьмым сингулярными числами), имеющая наибольшее значение, определяет разделение областей $\text{range}(\mathbf{A})$ от $\text{null}(\mathbf{A})$.

Таким образом, на основании выбран-

Таблица 3

Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел

$(i+1)/i$	Ks_i	$(i+1)/i$	Ks_i	$(i+1)/i$	Ks_i
2/1	1,076	9/8	1,243	16/15	1,052
3/2	5,121	10/9	1,048	17/16	1,124
4/3	1,075	11/10	1,106	18/17	1,039
5/4	354,714	12/11	1,096	19/18	1,180
6/5	1,261	13/12	1,172	20/19	1,023
7/6	20311,930	14/13	1,037	21/20	1,236
8/7	1,339	15/14	1,192	22/21	–

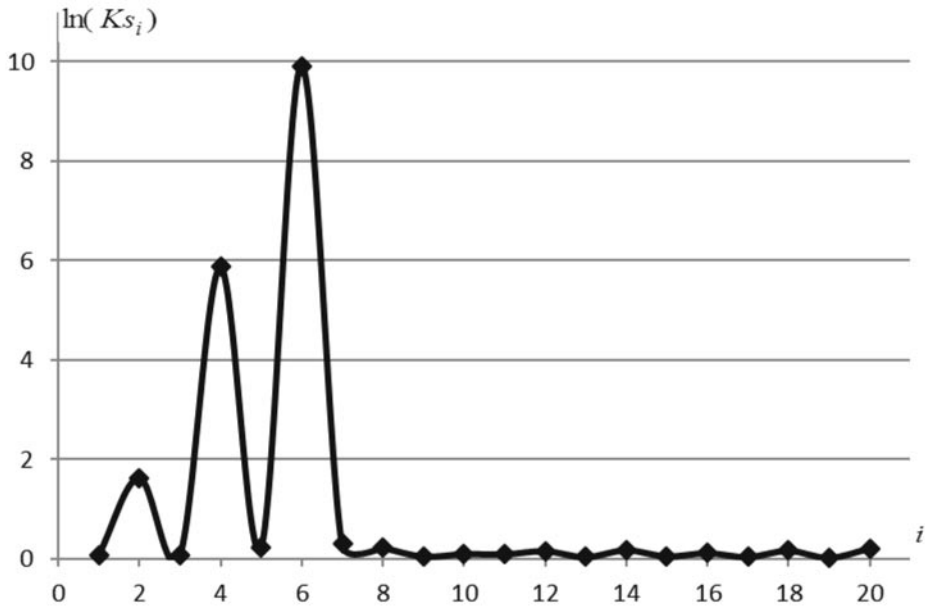


Рис. 2. Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел по логарифмической шкале

ного критерия разделения областей $\text{range}(A)$ и $\text{null}(A)$ имеем $\text{rank}(A, \epsilon) = 6$, что согласуется со сформированными в работе [1] выводами.

Численный эксперимент

Сформированный выше алгоритм использовался при проведении численного эксперимента по применению метода син-

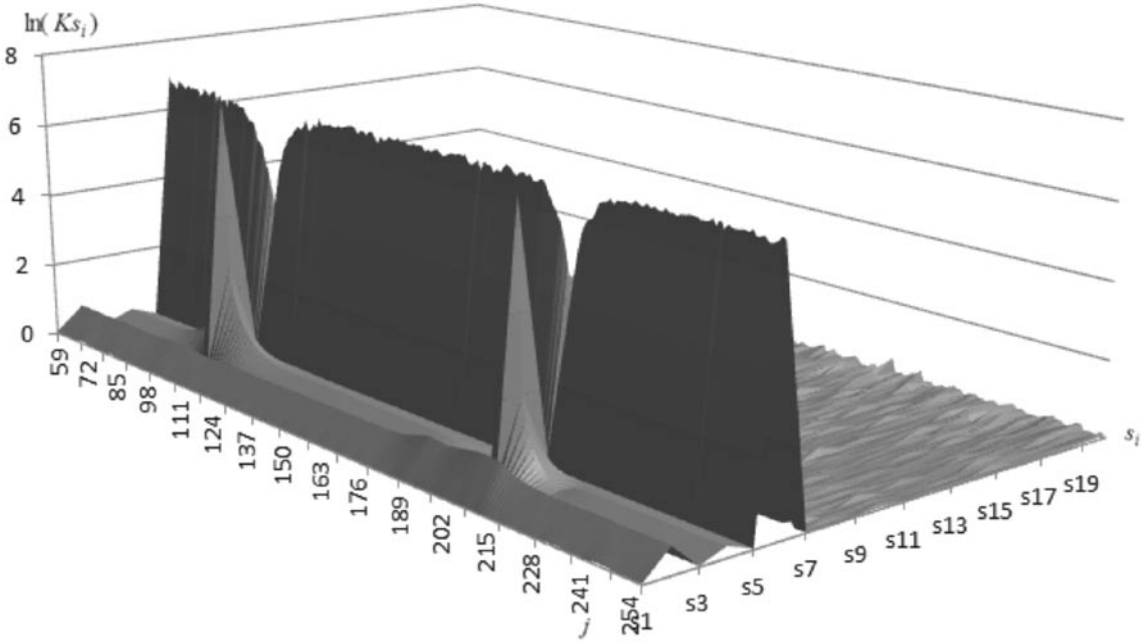


Рис. 3. Обратные коэффициента роста, отражающие динамику сингулярных чисел по логарифмической шкале для тестовых временных рядов, полученных сдвигом по частоте с заданной дискретностью



гулярного разложения к временной последовательности, образованной функцией вида (3).

Для определения присутствующих во временном ряде частот был задан диапазон тестовых частот (0; 3) с дискретностью 0,01.

Графическое изменение обратного коэффициента роста по логарифмической шкале $\ln(K_s)$ для множества рядов $\{g\}$, образованных сложением исходного ряда y и тестовых периодических компонент с определенной тестовой частотой α_T , представлено на рис. 3.

На основании эксперимента определено изменение численного ε -ранга траекторной

матрицы ряда A в точках с индексом 100 и 200. Следовательно, при заданной дискретности 0,01 частоты периодических компонент, присутствующих в исходной последовательности, равны 1 и 2 соответственно.

Таким образом, с помощью оценки численного ε -ранга удалось создать методику, позволяющую не только оценить динамическую размерность d (число степеней свободы) модели, но и идентифицировать параметры частот периодических компонент, присутствующих в исходном временном ряде, порождаемом периодической функцией вида (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин, О.В. Анализ структуры гармонических рядов динамики на базе алгоритма сингулярного разложения [Текст] / О.В. Кузьмин, В.С. Кедрин // Проблемы управления. – 2013. – №1. – С. 26–31.

2. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления [Текст] / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1984. – 320 с.

3. Дойников, А.Н. Методика синтеза математических моделей рядов макроэкономических показателей на основе алгоритмов сингулярного разложения [Текст] / А.Н. Дойников, В.С. Кедрин, М.К. Сальникова // Вестник Иркутского государственного технического ун-та. – 2006. – № 2. – С. 138–142.

4. Дойников, А.Н. Моделирование нестационарных процессов с использованием алгоритмов их сингулярного разложения [Текст] / А.Н. Дойников, В.С. Кедрин, М.К. Сальникова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – № 5 (47-1). – С. 143–147.

5. Голуб, Дж. Матричные вычисления: Пер. с англ. [Текст] / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

6. Golub, G.H. Singular Value Decomposition and least squares solutions [Text] / G.H. Golub, C. Reinsch // Handbook for Automatic Computation. Vol. 2. Linear Algebra; by J.H. Wilkinson, C. Reinsch (Eds.). – NY: Springer-Verlag, 1971. – P. 134–151.

REFERENCES

1. Kuz'min O.V., Kedrin V.S. Analiz struktury garmonicheskikh riadov dinamiki na baze algoritma singuliarnogo razlozheniia / Problemy upravleniia. – 2013. – №1. – P. 26-31. (rus)

2. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniia. – Moscow: Nauka. Gl. redaktsiia Fizmatlit, 1984 – 320 s. (rus)

3. Doinikov A.N., Kedrin V.S., Sal'nikova M.K. Metodika sinteza matematicheskikh modelei riadov makroekonomicheskikh pokazatelei na osnove algoritmov singuliarnogo razlozheniia / Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo un-ta. – 2006. – № 2. – P. 138–142. (rus)

4. Doinikov A.N., Kedrin V.S., Sal'nikova

M.K. Modelirovanie nestatsionarnykh protsessov s ispol'zovaniem algoritmov ikh singuliarnogo razlozheniia / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. St.-Petersburg: Izd-vo Politehn. un-ta, 2006. – № 5. – P. 143–147. (rus)

5. Golub Dzh., Van Loun Ch. Matrichnye vychisleniia: Per. s angl. – Moscow: Mir, 1999. – 548 p. (rus)

6. Golub G.H., Reinsch C. Singular Value Decomposition and least squares solutions // Handbook for Automatic Computation. Vol. 2: Linear Algebra, by J.H. Wilkinson and C. Reinsch (Eds.). – NY: Springer-Verlag, 1971. – P. 134–151.

КЕДРИН Виктор Сергеевич – доцент кафедры информационных технологий филиала Иркутского государственного университета в г. Братске, кандидат технических наук.

665729, Россия, г. Братск, ул. Ленина, д. 34.

E-mail: kedrins@mail.ru

KEDRIN, Victor S. *Bratsk Branch of Irkutsk State University.*
665729, Lenin Str. 34, Bratsk, Russia.
E-mail: kedrinvs@mail.ru

КУЗЬМИН Олег Викторович – *заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики Института математики, экономики и информатики Иркутского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.*

664003, Россия, г. Иркутск, б. Гагарина, д. 20.
E-mail: quzminov@mail.ru

KUZMIN, Oleg V. *Institute of Mathematics, Economics and Information Science of Irkutsk State University.*

664003, Gagarin Blvd. 20, Irkutsk, Russia.
E-mail: quzminov@mail.ru