

УДК 621.396.663

*И.А. Сухов, В.П. Акимов*

**МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЕЛЕНГАТОРА  
С КОЛЬЦЕВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
АЛГОРИТМА MUSIC**

*I.A. Sukhov, V.P. Akimov*

**RESOLUTION IMPROVEMENT OF MUSIC ALGORITHM  
FOR THE DIRECTION-FINDER BASED ON A CIRCULAR ANTENNA ARRAY**

Предложен метод увеличения разрешающей способности алгоритма MUSIC для кольцевых антенных решеток, основанный на формировании нескольких подрешеток из элементов кольцевой антенной решетки. Данный метод имеет повышенную разрешающую способность при меньших вычислительных затратах.

КЛАССИФИКАЦИЯ МНОЖЕСТВА СИГНАЛОВ. КОЛЬЦЕВАЯ АНТЕННАЯ РЕШЕТКА. РАДИОПЕЛЕНГАЦИЯ. АЛГОРИТМ ПЕЛЕНГАЦИИ. ФОРМИРОВАНИЕ ЛУЧЕЙ.

Method of the MUSIC algorithm improvement resolution for the direction-finder is suggested. The method is based on forming number of subarrays from elements of the circular antenna array. It gives the possibility to improve the direction-finder resolution.

MULTIPLE SIGNAL CLASSIFICATION. CIRCULAR ANTENNA ARRAY. DIRECTION-FINDING. DIRECTION-FINDING ALGORITHM. BEAMFORMING.

Одним из наиболее известных сверхразрешающих алгоритмов, используемых для пеленгации в сложной электромагнитной обстановке, является алгоритм MUSIC (Multiple Signal Classification) [1].

В данной статье предлагается метод увеличения разрешающей способности алгоритма MUSIC. Улучшение разрешающих характеристик алгоритма пеленгации достигается за счет формирования направленных подрешеток из элементов кольцевой антенной решетки.

Пусть на  $N$ -элементную кольцевую антенную решетку, состоящую из точечных антенных элементов, падают электромаг-

нитные волны от источников радиоизлучения, находящихся в дальней зоне излучения. На всех элементах антенной решетки одновременно измеряется амплитудно-фазовое распределение поля от источников радиоизлучения. Измеренные данные удобно записать в виде  $N$ -мерного вектора  $\mathbf{X} = [x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_N(t_k)]^T, k = 1, \dots, K$ . Задачей является определение количества приходящих сигналов и азимутов источников радиоизлучения по  $K$  временным выборкам (отсчетам) измеренного вектора в моменты времени  $t_k, k = 1, \dots, K$ .

Сигнал, принимаемый  $n$ -м антенным элементом  $x_n(t_k)$ , может быть представлен

в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t_k) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\varphi_m) s_m(t_k) + \mathbf{N}(t_k), k = 1, \dots, K, (1)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varphi_m) &= [F_1(\varphi_m) \exp(-j\psi_1(\varphi_m)), \\ &F_2(\varphi_m) \exp(-j\psi_2(\varphi_m)), \dots, \\ &\dots, F_N(\varphi_m) \exp(-j\psi_N(\varphi_m))]^T \end{aligned}$$

– матрица-столбец, определяющая амплитуды и фазы сигналов на элементах антенной решетки при условии, что сигнал приходит с направления  $\varphi_m$ ;

$F_n(\varphi_m)$  – амплитуда принимаемого сигнала  $n$ -м антенным элементом при условии, что сигнал приходит с направления  $\varphi_m$ ;

$s_m(t_k)$  – сигнал от  $m$ -го источника радиозлучения в момент времени  $t_k$ ;

$\mathbf{N} = [n_1(t_k), n_2(t_k), \dots, n_N(t_k)]^T, k = 1, \dots, K$  – матрица размером  $N \times K$ , представляющая аддитивный гауссовский шум в приемных трактах;

$\Phi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$  – направления на источники сигналов;

$e^{j\psi_n(\varphi)}$  – фаза сигнала, приходящего с азимута  $\varphi$ , на  $n$ -м антенном элементе;

$\Gamma$  – символ транспонирования.

Выражение (1) можно записать в более компактной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\Phi) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{N}, (2)$$

где  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{N}$  – матрицы размером  $N \times K$ ,  $\mathbf{S}$  – матрица размером  $M \times K$ .

$$\mathbf{X} = [x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_N(t_k)]^T, k = 1, \dots, K;$$

$$\mathbf{A}(\Phi) = [\mathbf{a}(\varphi_1), \mathbf{a}(\varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\varphi_M)];$$

$$\mathbf{S} = [s_1(t_k), s_2(t_k), \dots, s_M]^T, k = 1, \dots, K;$$

$$\mathbf{N} = [n_1(t_k), n_2(t_k), \dots, n_N(t_k)]^T, k = 1, \dots, K.$$

Для кольцевой антенной решетки функция  $\psi_n(\varphi_m)$  выглядит следующим образом:

$$\psi_n(\varphi_m) = \pi d \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{N} - \varphi_m\right), (3)$$

где  $d$  – диаметр антенной решетки в длинах волн.

Корреляционная матрица принятых сигналов  $\mathbf{R}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H = \\ &= (\mathbf{A}(\Phi) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{N})(\mathbf{A}(\Phi) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{N})^H = \end{aligned} (4)$$

$$= \mathbf{A}(\Phi) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^H \cdot \mathbf{A}(\Phi)^H + \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H,$$

где  $\mathbf{H}$  – символ комплексного сопряжения и транспонирования.

Предположим, что шумы на антенных элементах не коррелированы между собой, тогда:

$$n_i(t)n_j(t) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, (5)$$

где  $\sigma^2$  – мощность шума на антенных элементах.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\Phi) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^H \cdot \mathbf{A}(\Phi)^H + \sigma^2 \mathbf{I}, (6)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Корреляционная матрица может быть разложена на собственные векторы  $\mathbf{v}_n = [v_{1,n}, v_{2,n}, \dots, v_{N,n}]^T, n = 1, \dots, N$  и собственные числа  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M, \lambda_{M+1}, \dots, \lambda_N)$ . Собственные числа сортируются по убыванию и, используя критерий Акайке [2], пространство корреляционной матрицы делится на сигнальное и шумовое подпространства. Корреляционная матрица в базисе из собственных векторов выглядит следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_S \cdot \mathbf{\Lambda}_S \cdot \mathbf{Q}_S^H + \mathbf{Q}_N \cdot \mathbf{\Lambda}_N \cdot \mathbf{Q}_N^H, (7)$$

где  $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$  – собственные числа сигнального подпространства;

$\mathbf{\Lambda}_N = \text{diag}(\lambda_{M+1}, \lambda_{M+2}, \dots, \lambda_N)$  – собственные числа шумового подпространства;

$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M]$  – матрица собственных векторов-столбцов сигнального подпространства;

$\mathbf{Q}_N = [\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N]$  – матрица собственных векторов-столбцов шумового подпространства.

Сверхразрешающий алгоритм пеленгации MUSIC основан на ортогональности  $\mathbf{a}(\Phi)^H$  (в направлениях на источники сигналов) шумовому подпространству  $\mathbf{Q}_N$  корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{a}(\Phi)^H \cdot \mathbf{Q}_N = 0. (8)$$

В алгоритме MUSIC используется квадрат произведения  $\mathbf{a}(\Phi)$  на матрицу шумового подпространства:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\Phi)^H \mathbf{Q}_N|^2 &= (\mathbf{a}(\Phi)^H \mathbf{Q}_N) \times \\ &\times (\mathbf{a}(\Phi)^H \mathbf{Q}_N)^H = \mathbf{a}(\Phi)^H \mathbf{Q}_N \mathbf{Q}_N^H \mathbf{a}(\Phi). \end{aligned} (9)$$

Пеленгационная характеристика алгоритма MUSIC выглядит следующим образом:

$$P_{\text{MUSIC}}(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}(\varphi)^H \mathbf{Q}_N \mathbf{Q}_N^H \mathbf{a}(\varphi)}. \quad (10)$$

Если угол  $\varphi$  совпадает с одним из азимутов прихода сигнала  $\Phi$ , то знаменатель функции  $P_{\text{MUSIC}}(\varphi)$  стремится к нулю, а сама функция имеет максимум в этом направлении.

Данный алгоритм обеспечивает высокую разрешающую способность и высокую точность пеленгации при воздействии нескольких сигналов на антенную решетку. В данной работе предлагается способ увеличения разрешающей способности. Для этого процесс оценки пеленга необходимо разделить на две стадии. На первой стадии проводится предварительная оценка пеленгов любым алгоритмом пеленгации (например, неадаптивный формирователь луча [3], метод Кейпона [4], MUSIC). На второй стадии с помощью данных, полученных с антенных элементов решетки, происходит уточнение оцененных пеленгов согласно структурной схеме на рис. 1.

Антенная решетка условно разбивается на  $B$  подрешеток по  $L$  элементов, на основе которых формируется  $B$  лучей (диаграмм направленности) в направлениях  $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_B\}$ . Направления, в которых формируются лучи, выбираются близкими к пеленгам, полученным на первой стадии. Затем проводится процесс пеленгации классическим алгоритмом MUSIC, используя данные от подрешеток.

Формирование лучей может быть реализовано различными диаграммообразующими

методами. В рамках данной работы выбран классический метод формирования луча [3], основанный на синфазном сложении сигналов, принимаемых антенной решеткой с заданного направления. Согласно этому методу вектор измеренных данных  $\mathbf{X}$  необходимо умножить на вектор весовых коэффициентов  $\mathbf{W}$ , который в свою очередь совпадает с вектором  $\mathbf{a}(\Theta)$ , определяющим амплитуды и фазы на антенных элементах в случае прихода сигнала с направления  $\Theta$ .

Так как антенная подрешетка может быть составлена из любых элементов антенной решетки, то вектор  $\mathbf{a}_b(\varphi_m)$ , определяющий амплитуды и фазы на элементах антенной подрешетки, состоит из соответствующих элементов  $\mathbf{a}(\varphi_m)$ . В свою очередь весовой вектор подрешетки  $\mathbf{W}_b$  может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{W}_b = \mathbf{a}_b(\varphi_m), b = 1, \dots, B. \quad (11)$$

Выходные данные от подрешеток  $\mathbf{Y} = [y_1(t_k), y_2(t_k), \dots, y_B(t_k)]^T, k = 1, \dots, K$  определяются произведением весового вектора соответствующей подрешетки на вектор принятых данных соответствующими антенными элементами подрешетки  $\mathbf{X}_b$ :

$$y_b(t_k) = \mathbf{W}_b^H \cdot \mathbf{X}_b, b = 1, \dots, B. \quad (12)$$

Аналогично могут быть получены данные на выходе от подрешеток в результате воздействия  $M$  сигналов на антенную решетку:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}_b^H \cdot \mathbf{A}_b(\Theta) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{W}_b^H \cdot \mathbf{N}_b, b = 1, \dots, B. \quad (13)$$

Корреляционная матрица для данных на выходе подрешеток имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^H. \quad (14)$$

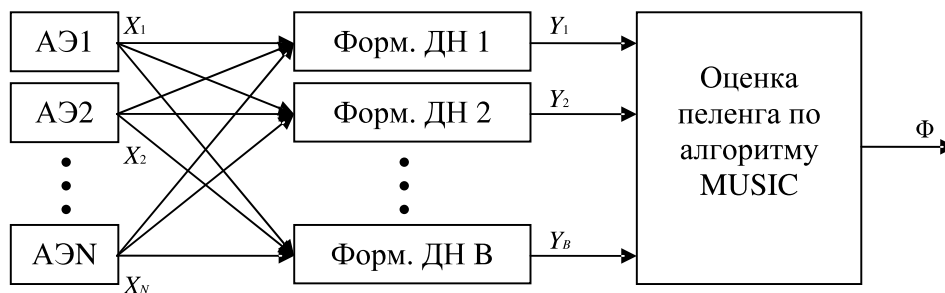


Рис. 1. Структурная схема алгоритма пеленгации (стадия 2)

Корреляционная матрица  $\mathbf{R}_B$  размером  $B \times B$  может быть разложена на собственные векторы  $\mathbf{v}_b = [v_{1,b}, v_{2,b}, \dots, v_{B,b}]^T, b = 1, \dots, B$  и собственные числа, принадлежащие сигнальному подпространству  $\Lambda_{SB} = \text{diag}(\lambda_{b_1}, \lambda_{b_2}, \dots, \lambda_{b_M})$  и шумовому подпространству  $\Lambda_{NB} = \text{diag}(\lambda_{b_1}, \lambda_{b_2}, \dots, \lambda_{b_{B-M}})$ :

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{Q}_{SB} \cdot \Lambda_{SB} \cdot \mathbf{Q}_{SB}^H + \mathbf{Q}_{NB} \cdot \Lambda_{NB} \cdot \mathbf{Q}_{NB}^H \quad (15)$$

где  $\mathbf{Q}_{SB}$  и  $\mathbf{Q}_{NB}$  – матрицы, состоящие из собственных векторов-столбцов сигнального и шумового подпространств корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_B$  соответственно.

Для обработки данных от подрешеток по алгоритму MUSIC необходимо использовать вектор  $\mathbf{a}_b(\varphi_m)$ , умноженный на весовой вектор  $\mathbf{W}_B$ , и шумовую матрицу  $\mathbf{Q}_{NB}$ , состоящую из собственных векторов шумового подпространства корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_B$ . Пеленгационная характеристика алгоритма MUSIC выглядит следующим образом:

$$PB_{\text{MUSIC}}(\varphi) = \frac{1}{(\mathbf{W}_B \cdot \mathbf{a}_B(\varphi))^H \cdot \mathbf{Q}_{NB} \cdot \mathbf{Q}_{NB}^H \cdot (\mathbf{W}_B \cdot \mathbf{a}_B(\varphi))} \quad (16)$$

Для определения пеленга необходимо найти  $M$  значений углов  $\varphi$ , при которых пеленгационная характеристика  $PB_{\text{MUSIC}}(\varphi)$  имеет наибольшие локальные максимумы. Эти углы и будут оценками пеленгов приходящих сигналов. Количество приходящих на антенную решетку сигналов  $M$  можно оценить по критерию Акайке или по критерию минимальной длины описания [5].

При применении описанного метода имеется несколько степеней свободы. Количество антенных элементов, используе-

мых для объединения в подрешетку, может быть от одного до  $N$ , при этом для объединения в подрешетку могут использоваться любые антенные элементы. Количество подрешеток  $B$  ничем не ограничено, но увеличение количества подрешеток приводит к значительному увеличению вычислительных ресурсов, т. к.  $B$  определяет порядок корреляционной матрицы подрешеток  $\mathbf{R}_B$ . Направления главных максимумов диаграмм направленностей подрешеток  $\Theta$  могут быть выбраны любыми, но наилучший эффект достигается в случае, если сформированные лучи направлены в область предположительных углов прихода сигнала.

На рис. 2 представлен график зависимости пеленгационных характеристик  $P_{\text{MUSIC}}$  и  $PB_{\text{MUSIC}}$  в случае прихода двух сигналов с направлений  $95^\circ$  и  $110^\circ$  на кольцевую антенную решетку из ненаправленных антенных элементов. Для расчета пеленгационных характеристик использовалась девятиэлементная антенная решетка  $N = 9$ , количество отсчетов данных для оценки пеленга  $K = 10$ , соотношение сигнал/шум (С/Ш) 10 дБ, диаметр антенной решетки равен длине волны принимаемых сигналов. Для расчета  $PB_{\text{MUSIC}}$  использовались шесть подрешеток из девяти элементов, формирующих диаграммы в направлениях  $70^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ$ .

Из графика видно, что пеленгационная характеристика классического алгоритма пеленгации MUSIC имеет один максимум, в то время как пеленгационная характеристика предлагаемого алгоритма имеет максимумы в направлениях, близких к истинным пеленгам.

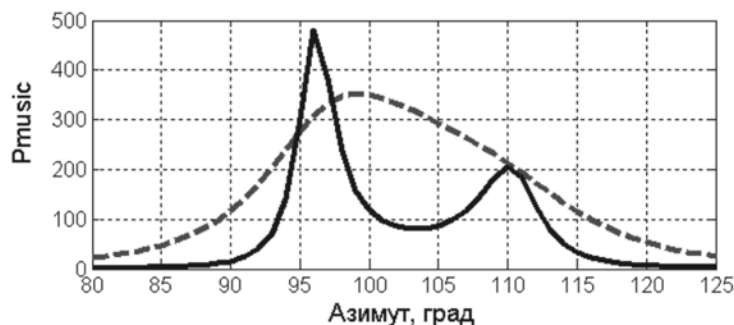


Рис. 2. Пеленгационные характеристики  $P_{\text{MUSIC}}$  (---) и  $PB_{\text{MUSIC}}$  (—)

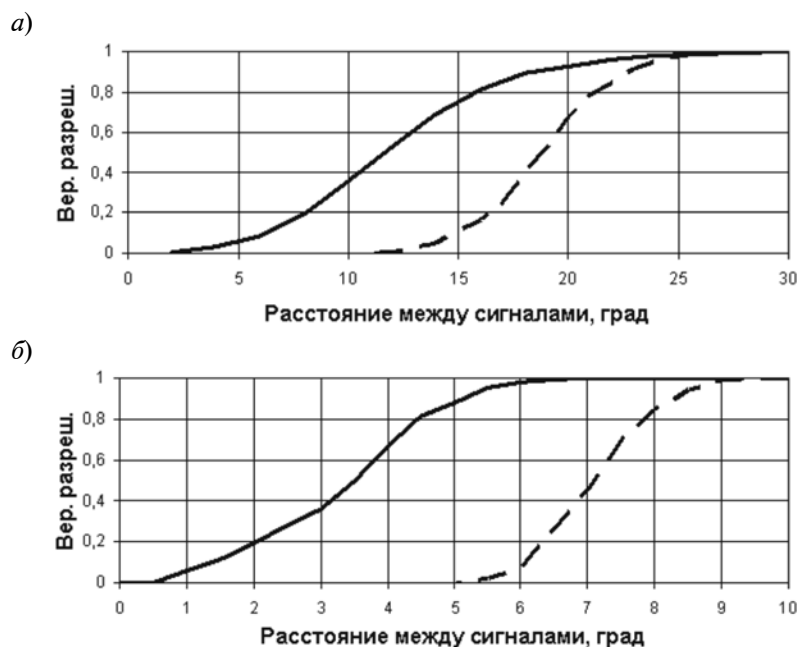


Рис. 3. График зависимости вероятности разрешения двух сигналов алгоритмом MUSIC (---) и предлагаемым алгоритмом пеленгации (—) при  $C/Ш = 10$  дБ,  $K = 10$  (а) и при  $C/Ш = 20$  дБ,  $K = 100$  (б)

Проведено моделирование прихода двух сигналов с целью сравнения разрешающей способности классического алгоритма пеленгации MUSIC и алгоритма MUSIC на основе формирования лучей. Моделирование проводилось в аналогичных условиях, сформированы три диаграммы в направлениях  $90^\circ$ ,  $105^\circ$  и  $120^\circ$ . Один из пеленгуемых сигналов расположен на азимуте  $110^\circ$ , положение второго изменялось от  $80^\circ$  до  $108^\circ$ . Для каждого положения сигнала эксперимент повторялся 1000 раз для оценки вероятности разрешения сигналов. Результаты эксперимента представлены на рис. 3 а.

Аналогично проведено моделирование прихода двух сигналов при соотношении сигнал/шум 20 дБ, числе отсчетов  $K = 100$ , диаметром  $d$ , равном длине волны пеленгуемых сигналов. Азимут одного сигнала равен  $60^\circ$ , азимут второго сигнала менялся от  $50^\circ$  до  $59,5^\circ$ . Предлагаемым алгоритмом сформировано три луча из всех антенных элементов в направлениях  $50^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $70^\circ$ . В результате проведенного эксперимента получен график зависимости вероятности разрешения двух сигналов от углового расстояния между ними (рис. 3 б).

Из графика видно, что предлагаемый алгоритм пеленгации обеспечивает более высокую вероятность разрешения двух сигналов.

Проведенные исследования алгоритма пеленгации MUSIC на основе формирования лучей показали, что наилучшая разрешающая способность достигается при формировании подрешеток из всех антенных элементов  $L = N$ .

Увеличение количества подрешеток  $B$  не приводит к значительному увеличению разрешающей способности. Количество подрешеток (лучей) определяет порядок корреляционной матрицы. Увеличение количества подрешеток значительно увеличивает вычислительные затраты. Во многих случаях для разрешения двух сигналов достаточным является формирование трех лучей в области предположительного нахождения пеленгуемых сигналов. Предлагаемый алгоритм также может быть применен и для антенных решеток, состоящих из направленных антенных элементов, при этом амплитудные диаграммы направленности могут быть учтены функцией  $F_n$ . Взаимное влияние между антенными эле-

ментами может быть учтено, т. к. матрица столбец  $\mathbf{a}(\varphi)$  может быть измерена при калибровке антенной системы и использована при применении предлагаемого алгоритма.

Предлагаемый алгоритм не требует значительных вычислительных затрат, т. к. для повышения разрешающей способности может использоваться меньше лучей, чем количество антенных элементов, что приводит к понижению размера корреляционной матрицы. Также снижаются вычислительные затраты при поиске локальных максимумов пеленгационной характеристики, т. к. не требуется производить поиск по всему азимуту, достаточно провести поиск в секторе углов, в которых были сформированы лучи. Для дополнительного уменьшения вычислительных затрат первую стадию оценки пеленгов

можно провести алгоритмом формирования луча [3], не требующего разложения корреляционной матрицы по собственным векторам и собственным числам. Пеленгационная функция этого алгоритма выглядит следующим образом:

$$P(\varphi) = \mathbf{a}(\varphi)^H \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(\varphi). \quad (17)$$

В данной статье предложен метод, который позволяет увеличить вероятность разрешения близкорасположенных источников излучения и может быть применен в качестве второй стадии к любому алгоритму оценки пеленгов. Предложенный метод не требует значительных вычислительных затрат, т. к. порядок корреляционной матрицы на второй стадии оценки пеленга может быть меньше, чем количество элементов в антенной решетке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt, R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [Text] / R. Schmidt // Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop. —1979. —P. 243–258.
2. Akaike, H. A new look at statistical model identification [Text] / H. Akaike // IEEE Trans. Automat. Control. —1974. —№ 19. —P. 716–723.
3. Krim, H. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [Text] / H. Krim, M. Viberg // IEEE Signal Process. Mag.

—1999. —№ 13 (4). —P. 67–94.

4. Кейпон, Дж. Обработка данных большой сейсмической группы способом многомерного максимального правдоподобия [Текст] / Р. Дж. Гринфилд, Р. Дж. Колкер // ТИИЭР. —1967. —Т. 55. —№ 22. —С. 66–82.

5. Ратынский, М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках [Текст] / М.В. Ратынский. —М.: Радио и связь, 2003. — 200 с.

#### REFERENCES

1. Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation / Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop. —1979. —P. 243–258.
2. Akaike H. A new look at statistical model identification / IEEE Trans. Automat. Control. —1974. — № 19. —P. 716–723.
3. Krim H. Two decades of array signal processing research: the parametric approach / IEEE Signal

Process. Mag. —1999. —№ 13 (4). —P. 67–94.

4. Keipon Dzh. Obrabotka dannykh bol'shoi seismicheskoi gruppy sposobom mnogomernogo maksimal'nogo pravdopodobii / TIIEP. —1967. —Т. 55. —№ 22. — S. 66–82. (rus)

5. Ratynskii M.V. Adaptatsiia i sverkhrazreshenie v antenykh reshetkakh. —Moscow: Radio i sviaz', 2003. — 200 s. (rus)

---

**СУХОВ Игорь Александрович** — аспирант кафедры радиотехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: sia23@mail.ru

**SUKHOV, Igor A.** — St. Petersburg State Polytechnical University.

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: sia23@mail.ru

**АКИМОВ Валерий Петрович** – профессор кафедры радиотехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, доктор физико-математических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: [valeri\\_akimov@mail.ru](mailto:valeri_akimov@mail.ru)

**AKIMOV, Valerij P.** – *St. Petersburg State Polytechnical University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: [valeri\\_akimov@mail.ru](mailto:valeri_akimov@mail.ru)