УДК 519.2

Н.В. Данилова, Т.А. Гробер
Ростов-на-Дону, Россия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ (B, S)-РЫНКА С ДИВИДЕНДАМИ

N.V. Danilova, T.A. Grober
Rostov-on-Don, Russia

THE FAIR PRICE CALCULATION FOR THE (B,S)-MARKET MODEL WITH DIVIDENDS

Рассмотрена диффузионная модель (B,S)-рынка со случайным переключением параметров и с дивидендами. Приведены три способа расчета справедливой цены Европейского опциона колл для «модели с коридором».
ДИВИДЕНД. БИНАРНОЕ ДЕРЕВО. СПРАВЕДЛИВАЯ ЦЕНА. ОПЦИОН. ТЕОРЕМА ГИРСАНОВА.

In this paper the diffusion (B, S)-market model with stochastic changing of parameters and dividends is considered. Three ways of fair price calculating in the case of European call option for the «model with corridor» are described.
DIVIDEND. BINARY TREE. FAIR PRICE. OPTION. GIRSANOV THEOREM.

С началом первых торгов на Чикагской бирже появляются работы, посвященные оцениванию специальных страховых финансовых инструментов – опционов. В 1973 г. Р. Мертон, Ф. Блэк и М. Шоулс рассмотрели стандартную диффузионную модель (B,S)-рынка и доказали формулу для рациональной (справедливой) стоимости опционов колл европейского типа. Идея авторов в вопросе о том, что следует понимать под справедливой ценой, состояла в том, что эта стоимость должна быть минимальной величиной начального капитала, которая дает продавцу опциона возможность построения хеджирующего портфеля [3]. В силу полноты рынка [4] мартингальная мера является единственной.

Стандартная модель основана на не слишком реалистичных предположениях и сильно упрощает действительность. В ней предполагается, что процентная ставка, коэффициенты изменчивости (волатильности) и роста являются постоянными. Также следует отметить т. н. смайл-эффект, который не объясняется стандартной (B,S)-моделью. Это привело к разнообразным ее обобщениям и усовершенствованиям.

В статье рассматривается диффузионная модель (B,S)-рынка, параметры которой изменяются в случайные марковские моменты времени («модель с коридором»). Приводятся три способа расчета справедливой цены [5] Европейского опциона колл при условии, что происходит выплата дивидендов от обладания акцией.

Описание модели. Постановка задачи. Алгоритмы решения

Рассмотрим следующую модель (B,S)-рынка:

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t) \\ dB_t = r(S_t)B_t dt \end{cases}. \qquad (1)$$

$$t \in [0,T]$$

Заданы начальные условия: $S_t|_{t=0} = S_0$, $B_t|_{t=0} = B_0$. Параметры $\mu(\cdot), r(\cdot), \sigma(\cdot) > 0$ удовлетворяют стандартным условиям существования строго марковского решения уравнения (1) относительно естественной фильтрации [9], порождаемой винеровским процессом W ($F_t = \sigma(W_s; s \le t), F_0$ состоит из двух событий – достоверного и невозможного, – и пополнено всеми событиями с нулевыми вероятностями).

Предположим, что от обладания акцией происходит выплата дивидендов. Более точно, это означает следующее. Если $S = (S_t)_{t\ge 0}$ – рыночная цена акции, то капитал $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t\ge 0}$ обладателя акций с учетом выплачиваемых дивидендов считается эволюционирующим (с учетом дисконтирования) в соответствии со следующим правилом [1]:

$$d\left(\frac{\tilde{S}_t}{B_t}\right) = d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \delta(S_t)\frac{S_t}{B_t}dt. \qquad (2)$$

Здесь $\delta(\cdot) \ge 0$ есть параметр, характеризующий интенсивность выплаты дивидендов.

Поскольку

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}((\mu(S_t) - r(S_t))dt + \sigma(S_t)dW_t), \qquad (3)$$

то из (2)

$$d\left(\frac{\tilde{S}_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}((\mu(S_t) - r(S_t) + \delta(S_t))dt + \\ + \sigma(S_t)dW_t). \qquad (4)$$

Процесс плотности мартингальной меры P^* относительно исходной меры P имеет вид:

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \frac{r(S_s) - \mu(S_s) - \delta(S_s)}{\sigma(S_s)} dW_s - \\ - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{r(S_s) - \mu(S_s) - \delta(S_s)}{\sigma(S_s)}\right)^2 ds\right). \qquad (5)$$

Согласно теореме Гирсанова для диффузионных процессов процесс W_t^*, заданный следующим образом:

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \frac{r(S_s) - \mu(S_s) - \delta(S_s)}{\sigma(S_s)} ds, \qquad (6)$$

является винеровским процессом по мере P^*, и модель (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} dS_t = S_t((r(S_t) - \delta(S_t))dt + \sigma(S_t)dW_t^*) \\ dB_t = r(S_t)B_t dt \end{cases}. \qquad (7)$$

$$t \in [0, T]$$

Процесс $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)_{t \ge 0}$ является мартингалом по мере P^*, и мера P^* единственна.

Рассмотрим задачу:

$$\min_{\gamma} X_0 \qquad (8)$$

при ограничениях $d\left(\frac{X_t}{B_t}\right) = \gamma_t d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$, $X_T \ge f_T$, X – адаптированный процесс, γ – предсказуемый процесс относительно фильтрации F.

В случае единственности мартингальной меры решение этой задачи имеет следующий вид:

$$X_t = B_t E^*\left(\frac{f(S_T)}{B_T} / F_t\right), \qquad (9)$$

Рассмотрим процесс

$$Y_t(S_t) = B_t E^*\left(\frac{f(S_T(S_t))}{B_T}\right). \qquad (10)$$

Тогда из строго марковского свойства винеровского процесса следует, что $\mathrm{Law}(Y_t) = \mathrm{Law}(X_t)$.

Пусть в марковские моменты остановки [6] $t = \tau_0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le ... \le \tau_N \le T$ происходит переключение параметров σ, r, δ следующим образом: если $s \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, то параметры модели $\hat{\sigma}_i, \hat{r}_i, \hat{\delta}_i, i = 0, ..., N$. Для удобства изложения положим $\tau_{N+1} = \tau_{N+2} = ... = T$.

Пусть

$$f(S_T) = \max(S_T - K, 0), \qquad (11)$$

то есть в качестве финансового обязательства рассмотрим Европейский опцион колл с контрактной ценой K.

Теорема 1. Решение задачи (8) для модели (7) с переключением параметров и с функцией f, задаваемой формулой (11), имеет вид:

$$X_t = S_t E^*\left(\Phi\left(\frac{-d(\tau_1, ..., \tau_N) + \chi^2(\tau_1, ..., \tau_N)}{\chi(\tau_1, ..., \tau_N)}\right)\right) - \\ -KE^*\left(\frac{B_t}{B_T}\Phi\left(-\frac{d(\tau_1, ..., \tau_N)}{\chi(\tau_1, ..., \tau_N)}\right)\right), \qquad (12)$$

где

$$d(\tau_1, ..., \tau_N) = \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \\ - \sum_{k=1}^{N} \eta_{k-1}(\tau_k - \tau_{k-1}) - \eta_N(T - \tau_N),$$

$$\chi(\tau_1, ..., \tau_N) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \hat{\sigma}_{k-1}^2(\tau_k - \tau_{k-1}) + \hat{\sigma}_N^2(T - \tau_N)},$$

$$\eta_i = \hat{r}_i - \hat{\delta}_i - \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}, \; i = 0, ..., N;$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Рассмотрим «коридор» $[M_0(t), M_1(t)]$, где $M_0(t), M_1(t)$ − некоторые заданные функции от времени. Как только процесс S достигает границ данного «коридора», коэффициент тренда $r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$ изменяет знак так, чтобы процесс S оставался по возможности в пределах данного «коридора».

Изменение знака тренда происходит за счет переключения процентной ставки r с $\hat{r}_1$ на $\hat{r}_2$, волатильности σ с $\hat{\sigma}_1$ на $\hat{\sigma}_2$ и интенсивности выплаты дивидендов δ с $\hat{\delta}_1$ на $\hat{\delta}_2$ так, чтобы $\hat{r}_1 - \hat{\delta}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} > 0$, $\hat{r}_2 - \hat{\delta}_2 - \frac{\hat{\sigma}_2^2}{2} < 0$.

Моменты остановки можно определить следующим образом:

$$\tau_1 = \inf\{t \le s \le T : S_s = M_1(s)\},$$
$$\tau_2 = \inf\{\tau_1 \le s \le T : S_s = M_0(s)\} \quad (13)$$

и т. д. до τ_N.

Пусть

$$M_0(t) = c_0 e^{dt},$$
$$M_1(t) = c_1 e^{dt}, \quad (14)$$
$$0 \le d < \hat{r}_1 - \hat{\delta}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2},$$
$$c_1 e^{dt} > S_t,$$
$$c_0 < c_1.$$

Теорема 2. Пусть $N = 2$, тогда мартингальная плотность распределения [8] моментов остановки (τ_1, τ_2) имеет вид:

$$p^*(x_1, x_2) = \begin{cases} I_0(x_1, x_2), & \text{если } t \le x_1 \le T, \quad x_1 \le x_2 \le T \\ I_1(x_1), & \text{если } t \le x_1 \le T, \quad x_2 = T \\ I_2, & \text{если } x_1 = x_2 = T \end{cases}, \quad (15)$$

где

$$\sqrt{a_1} = \frac{1}{\hat{\sigma}_1}\left(\hat{r}_1 - \hat{\delta}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} - d\right) > 0,$$
$$\sqrt{b_1} = \frac{1}{\hat{\sigma}_1}\ln\left(\frac{c_1 e^{dt}}{S_t}\right) > 0,$$
$$\sqrt{a_2} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_2}\left(\hat{r}_2 - \hat{\delta}_2 - \frac{\hat{\sigma}_2^2}{2} - d\right) > 0,$$
$$\sqrt{b_2} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_2}\ln\left(\frac{c_0}{c_1}\right) > 0,$$
$$I_0(x_1, x_2) = g(a_1, b_1, x_1) \cdot g(a_2, b_2, x_2 - x_1),$$
$$I_1(x_1) = g(a_1, b_1, x_1)\int_T^{\infty} g(a_2, b_2, x_2 - x_1)dx_2,$$
$$I_2 = \int_T^{\infty} g(a_1, b_1, x_1)dx_1.$$

Заметим, что при расширении «коридора» справедливая цена сходится к следующему значению:

$$C = S_0 e^{-\hat{\delta}_1 T}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(\hat{r}_1 - \hat{\delta}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2}\right)}{\hat{\sigma}_1\sqrt{T}}\right) -$$
$$-Ke^{-\hat{r}_1 T}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(\hat{r}_1 - \hat{\delta}_1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2}\right)}{\hat{\sigma}_1\sqrt{T}}\right), \quad (16)$$

т. е. вычисленному при условии, что параметры модели $\hat{r}_1, \hat{\delta}_1, \hat{\sigma}_1$.

Способ нахождения справедливой цены для «модели с коридором», основанный на теоремах 1 и 2, назовем *аналитическим методом*.

Рассмотрим дискретную аппроксимацию модели (7):

$$\Delta S_n = S_{n-1}(r_n - \delta_n + \sigma_n \varepsilon_n^*), \quad (17)$$
$$\Delta B_n = B_{n-1} r_n,$$
$$n = 1, \ldots, \widehat{N},$$

где $\varepsilon_n^* \in \{-1, 1\}$ и $P^*(\varepsilon_n^* = 1) = P^*(\varepsilon_n^* = -1)$. Заметим, что полученный рынок является полным и безарбитражным [7].

Задача (8) имеет вид:

$$\min_{\gamma} \widehat{X}_0 \quad (18)$$

при ограничениях $\Delta\left(\frac{\widehat{X}_n}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$, $\widehat{X}_{\hat{N}} \ge f_{\hat{N}}$, $\widehat{X}$ – адаптированный процесс, γ – предсказуемый процесс относительно фильтрации F.

В силу единственности мартингальной меры решение задачи (18) имеет вид:

$$\widehat{X}_{n-1} = B_{n-1} E^*\left(\frac{f_{\hat{N}}}{B_{\hat{N}}} / F_{n-1}\right). \quad (19)$$

Теорема 3. Рассмотрим модель, представленную формулами (17). Требуется решить задачу (18). Пусть $\widehat{X}_{\hat{N}} = f_{\hat{N}}(S_{\hat{N}}) = g_{\hat{N}}(S_{\hat{N}})$. Тогда

$$\widehat{X}_{n-1} = g_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{1}{2(1 + r_n)}(g_n(S_{n-1}(1 + r_n -$$
$$-\delta_n + \sigma_n)) + g_n(S_{n-1}(1 + r_n - \delta_n - \sigma_n))), \quad (20)$$

$$n=1,\ ...,\ \widehat{N}.$$

Способ нахождения справедливой цены для «модели с коридором», основанный на теореме 3, назовем *методом дискретной аппроксимации*.

В третьем способе нахождения справедливой цены для «модели с коридором» производится расчет математических ожиданий в теореме 2 с помощью метода Монте-Карло. Алгоритм расчета имеет следующий вид.

Для достаточно большого числа экспериментов − L (популяций процесса S) необходимо:

1. Произвести дискретизацию процесса S согласно следующей формуле:

$$S_i=S_{i-1}\exp\left(\left(r(S_{i-1})-\delta(S_{i-1})-\frac{\sigma^2(S_{i-1})}{2}\right)h+\sigma(S_{i-1})\varepsilon_i\sqrt{h}\right), \quad (21)$$

где $S_0=S_t,\ h=\dfrac{T-t}{\widehat{N}},\ i=1,\ ...,\ \widehat{N}$. Случайные величины $\varepsilon_i\sim N(0,1)$ генерируются согласно адаптивному алгоритму, приведенному в [2].

Произвести дискретизацию процесса B согласно следующей формуле:

$$B_i=B_{i-1}\exp(r(S_{i-1})\cdot h), B_0=B_t, i=1,\ ...,\ \widehat{N}. \quad (22)$$

2. Определить моменты остановки: $\tau_1=\inf\limits_{0\le i\le\widehat{N}}(S_i\ge M_1(ih))h$, $\tau_2=\inf\limits_{\frac{\tau_1}{h}\le i\le\widehat{N}}(S_i\le M_0(ih))h$.

3. Зная (τ_1,τ_2), следует вычислить интегралы из формулы (12) с помощью численных методов.

4. Найти справедливую цену финансового обязательства:

$$\breve{X}_t=S_t\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\Phi\left(\frac{-d(\tau_1^i,\tau_2^i)+\chi^2(\tau_1^i,\tau_2^i)}{\chi(\tau_1^i,\tau_2^i)}\right)-$$
$$-K\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{B_t}{B_T(B_t;\tau_1^i,\tau_2^i)}\Phi\left(-\frac{d(\tau_1^i,\tau_2^i)}{\chi(\tau_1^i,\tau_2^i)}\right).$$

Пример. Начальные данные имеют вид:
$\widehat{N}=1000, N=2, K=3, S_0=6, B_0=1,\ \hat{r}_1=0,15,\ \hat{\sigma}_1=0,25,\ \hat{r}_2=0,35,\ \hat{\sigma}_2=0,45,\ \hat{\delta}_1=0,5,\ \hat{\delta}_2=0,6,\ L=1000, T=1,\ t=0,\ c_1=5,\ c_2=7, d=0$.

В методе дискретной аппроксимации

$$\hat{r}_1:=\frac{T\hat{r}_1}{\widehat{N}}, \hat{r}_2:=\frac{T\hat{r}_2}{\widehat{N}}, \hat{\sigma}_1:=\frac{\sqrt{T}\hat{\sigma}_1}{\sqrt{\widehat{N}}}, \hat{\sigma}_2:=\frac{\sqrt{T}\hat{\sigma}_2}{\sqrt{\widehat{N}}},$$

$$\hat{\delta}_1:=\frac{T\hat{\delta}_1}{\widehat{N}}, \hat{\delta}_2:=\frac{T\hat{\delta}_2}{\widehat{N}}.$$

Тогда $X_0\approx 3{,}56, \widehat{X}_0\approx 3{,}57, \breve{X}_0\approx 3{,}58$.

Отметим, что при расширении «коридора» справедливые цены сходятся к значению $C\approx 3{,}42$, которое совпадает со значением, полученным по формуле (16).

В статье рассмотрена диффузионная модель (B,S)-рынка со случайным переключением параметров и с дивидендами. Приведены три способа расчета справедливой цены Европейского опциона колл для «модели с коридором»: аналитический метод, метод дискретной аппроксимации, метод Монте-Карло. Показано, что при расширении «коридора» справедливые цены сходятся к значению, соответствующему ситуации, когда параметры в модели не изменяются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ширяев, А.Н.** Основы стохастической финансовой математики [Текст] / А.Н. Ширяев. –М.: ФАЗИС, 2004. –1056 с.

2. **Белявский, Г.И.** Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчеты и финансовые приложения [Текст] / Г.И. Белявский, Н.В. Данилова. –LAMBERT Academic Publishing, 2012. –122 с.

3. **Белявский, Г.И.** Среднеквадратичное хеджирование для одной модели неполного рынка с двумя источниками случайности [Текст] / Г.И. Белявский, Н.В. Данилова // Вестник РГУПС. –2009. –№ 3. –129 с.

4. **Белявский, Г.И.** Расчеты для общей бинарной модели (B, S)-рынка [Текст] / Г.И. Белявский, Н.В. Данилова, Т.Н. Кондратьева // Обозрение прикладной и промышленной математики. –2009. –Т. 16. Вып. 6. –982 с.

5. **Белявский, Г.И.** Алгоритм расчета безарбитражной цены финансового обязательства на основе дискретизации процессов Леви [Текст] / Г.И. Белявский, Н.Д. Никоненко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. –2012. –№ 3 (150). –56 с.

6. **Белявский, Г.И.** Задача о рандомизированной остановке при среднеквадратичном хеджировании [Текст] / Г.И. Белявский, Н.Д. Никоненко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. –2011. –№ 4 (128). –91 с.

7. **Павлов, И.В.** О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных [Текст] / И.В. Павлов, М.Н. Богачева // Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. –2002. –№ 3. –16 с.

8. **Данилов, В.А.** Двухмерная плотность вероятности модуля случайного вектора с гауссовскими

компонентами [Текст] / В.А. Данилов, О.С. Лабунько, Д.И. Касымов // Радиотехника. –2004. –№ 4.

9. **Данилов, В.А.** Вероятностное моделирование негауссовских случайных процессов со спектром узкополосного типа [Текст] / В.А. Данилов // Радиотехника и электроника. –1996. –№ 8.

REFERENCES

1. Shiriaev A.N. Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. –Moscow: FAZIS, 2004. –1056 s. (rus)

2. Beliavskii G.I., Danilova N.V. Diffuzionnye modeli so sluchainym perekliucheniem parametrov. Raschety i finansovye prilozheniia. – LAMBERT Academic Publishing, 2012. –122 s. (rus)

3. Beliavskii G.I., Danilova N.V. Srednekvadratichnoe khedzhirovanie dlia odnoi modeli nepolnogo rynka s dvumia istochnikami sluchainosti / Vestnik RGUPS. –2009. –№ 3. –S. 129. (rus)

4. Beliavskii G.I., Danilova N.V., Kondrat'eva T.N. Raschety dlia obshchei binarnoi modeli (B,S)-rynka / Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki. –2009. –T. 16. –Vyp.6. –S. 982. (rus)

5. Beliavskii G.I., Nikonenko N.D. Algoritm rascheta bezarbitrazhnoi tseny finansovogo obiazatel'stva na osnove diskretizatsii protsessov Levi / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telecommunikatsii. Upravlenie. –2012. –№ 3(150). –S. 56. (rus)

6. Beliavskii G.I., Nikonenko N.D. Zadacha o randomizirovannoi ostanovke pri srednekvadratichnom khedzhirovanii / Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telecommunikatsii. Upravlenie. –2011. –№ 4 (128). –S. 91. (rus)

7. Pavlov I.V., Bogacheva M.N. O khaarovskikh rasshireniiakh bezarbitrazhnykh finansovykh rynkov do bezarbitrazhnykh i polnykh / Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii; Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. –2002. –№ 3. –S. 16. (rus)

8. Danilov V.A., Labun'ko O.S., Kasymov D.I. Dvukhmernaia plotnost' veroiatnosti modulia sluchainogo vektora s gaussovskimi komponentami / Radiotekhnika. –2004. –№ 4. (rus)

9. Danilov V.A. Veroiatnostnoe modelirovanie negaussovskikh sluchainykh protsessov so spektrom uzkopolosnogo tipa / Radiotekhnika i elektronika. –1996. –№ 8. (rus)

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2013