

Математическое моделирование: методы, алгоритмы, технологии

УДК 532.5.031

В.П. Житников, Н.И Житникова, С.С. Поречный
Уфа, Россия

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ГИБКОЙ ВОЗДУХООПОРНОЙ ОБОЛОЧКИ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

V.P. Zhitnikov, N.I. Zhitnikova, S.S. Porechny
Ufa, Russia

EXTREMAL PROPERTIES OF THE HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF SEPARATED FLOW ABOUT FLEXIBLE AIR SUPPORTED SHELL NEAR A SCREEN

Рассмотрена задача обтекания идеальной жидкостью воздухоопорной цилиндрической оболочки для исследования характеристик одного из возможных типов гибких ограждений, применяемых в аппаратах на воздушной подушке. Для оценки погрешности и уточнения численных результатов использованы методы фильтрации, что позволило исследовать тонкие эффекты.

ГИДРОУПРУГОСТЬ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. МЕТОД ЛЕВИ–ЧИВИТЫ. КОЛЛОКАЦИИ. ФИЛЬТРАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

The problem of ideal fluid flow about air supported cylindrical shell is considered to study the characteristics of possible types of flexible skirt used in hovercrafts. The filtration methods are used to the error estimation and precision increase of numerical results, which allow to investigate slightly noticeable effects.

HYDROELASTICITY. FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE. LEVI–CIVITA METHOD. COLLOCATION. NUMERICAL RESULTS FILTRATION.

Задача обтекания идеальной жидкостью воздухоопорной оболочки имеет практическое применение при исследовании течений в аппаратах на воздушной подушке (АВП) с гибкими ограждениями, работающих по камерной схеме.

И.Л. Галиной [1] рассмотрено решение задачи в случае равенства давления внутри оболочки и константы Бернулли потока и без учета геометрии конструкции. В работе [2] проведено численное исследование решений при различных соотношениях давлений и расстояний между оболочкой и экраном. В данной статье с помощью технологии фильтрации численных результатов [3, 4] под-

робно рассматривается поведение характерных параметров при смещении точки отрыва потока относительно положения, соответствующего гладкому отрыву – условию Бриллюэна–Вилла (конечности кривизны струи в точке отрыва).

При исследовании кавитационного обтекания кругового цилиндра [5] было замечено, что зависимости многих параметров имеют локальные экстремумы при выполнении этого условия. Однако в связи с ограничением точности расчетов соображениями «здравого смысла» этот вывод вызывал некоторые сомнения, поскольку количество верных знаков, с которыми определяется

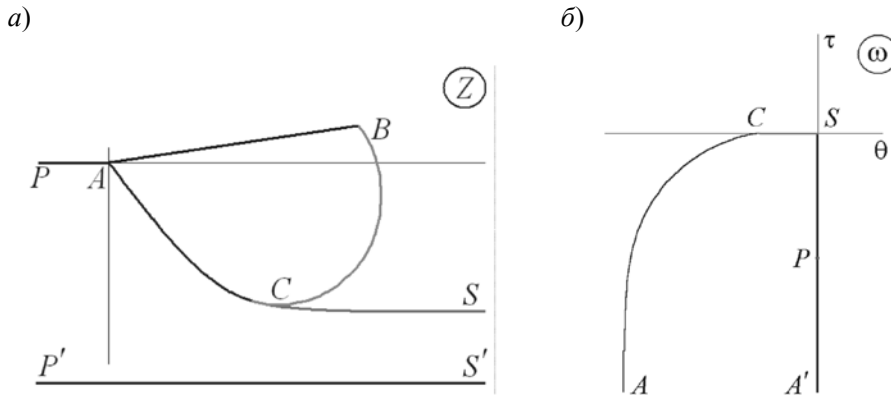


Рис. 1. Схема обтекания воздухоопорной оболочки:
а – физическая плоскость; б – плоскость изменения функции Жуковского

точка экстремума, как правило, в два раза меньше, чем в вычисленном значении исследуемой функции. Кроме того, теоретический интерес имеет проверка справедливости этого вывода в случае обтекания оболочки, форма которой существенно меняется при изменении положения точки отрыва.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, оба конца которой (*A* и *B*) закреплены (в задаче описывается один из возможных типов гибких ограждений, применяемых в АВП, – баллонного). Скорость потока на свободной линии тока равна V_0 , скорость на бесконечности слева – V_1 . На линии *PA* и вдоль экрана *P'S'* вектор скорости параллелен оси *X* (рис. 1).

На смоченной части оболочки должно удовлетворяться уравнение Лапласа:

$$T = R(P_6 - P) = \text{const}, \quad (1)$$

где *R* – радиус кривизны оболочки ($R > 0$, если оболочка выпукла в сторону жидкости); *P* – давление в потоке; P_6 – давление внутри оболочки; *T* – натяжение оболочки.

При небольших перепадах давлений, характерных для АВП, воздух можно моделировать идеальной невязкой несжимаемой жидкостью.

Тогда условие (1) с учетом уравнения Бернулли $\rho \frac{V^2}{2} + P = P^*$ целесообразно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\rho V_0^2}{2T} \left(\mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right), \quad \mu = \frac{P_6 - P_0}{P^* - P_0}, \quad (2)$$

где *V* – модуль вектора скорости; θ – угол между вектором скорости и осью *x*; *s* – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки *A*; P_0 , V_0 – давление и модуль скорости на свободной поверхности; P^* – константа Бернулли.

Метод решения задачи

Для решения этой задачи используются методы теории функций комплексного переменного, аналогично [2].

Решение задачи можно проводить на одной четверти единичного круга области изменения параметрического переменного ζ . Отобразим физическую плоскость *Z* на ζ так, чтобы бесконечно удаленная точка *S* перешла в точку $\zeta = 0$, а граница, соответствующая оболочке, – в четверть окружности (рис. 2 а).

Тогда комплексный потенциал, область изменения которого является полоса ширины *Q*

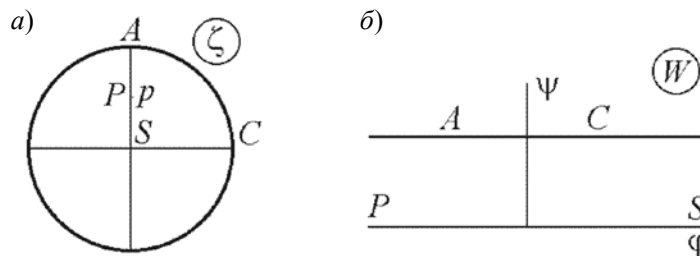


Рис. 2. Формы образов области течения на плоскостях:
а – параметрической; б – комплексного потенциала

(рис. 2 б), и дифференциал дуговой абсциссы на участке границы AC , соответствующем оболочке (при $\zeta = e^{i\sigma}$), равны

$$W = \frac{Q}{\pi} \ln \left[\left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)^2 + \left(\frac{1}{p} - p \right)^2 \right] + iQ, \quad (3)$$

$$ds = \frac{1}{V} \frac{dW}{d\sigma} d\sigma = -\frac{Q}{\pi V} \frac{8 \cos \sigma \cdot \sin \sigma}{4 \cos^2 \sigma + \left(\frac{1}{p} - p \right)^2} d\sigma. \quad (4)$$

С учетом (4) условие (2) преобразуется:

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{\lambda}{\pi} \left((\mu - 1) \frac{V_0}{V} + \frac{V}{V_0} \right) \frac{\cos \sigma \cdot \sin \sigma}{\cos^2 \sigma + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} - p \right)^2}, \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\rho V_0 Q}{T}.$$

Задача решается с помощью функции Жуковского $\omega = i \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dZ} = \theta + i\tau$. Так как $dW/dZ = Ve^{-i\theta}$, то $\omega = \theta + i\tau$, где $\tau = \ln V/V_0$.

Функция $\omega = \theta + i\tau$ должна удовлетворять следующим граничным условиям (см. рис. 1 б):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= 0 \text{ на } AP \text{ и } PS; \\ \operatorname{Im} \omega &= 0 \text{ на } CS; \end{aligned} \quad (6)$$

уравнению (5) на AC .

Для выбора вида функции $\omega(\zeta)$ установим поведение функции $\theta(\sigma)$ вблизи критической точки $\sigma = \pi/2$. Поскольку вблизи угловой точки A $W - W_A \sim (\zeta - i)^2$, $z - z_A \sim (W - W_A)^{(1-\beta/2)}$, ($\beta = -2\theta_A/\pi$), то скорость

$$V = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \left| \frac{dz}{dW} \right|^{-1} \sim |W - W_A|^{\beta/2} \sim |\zeta - i|^\beta,$$

то есть $V = V_0 \gamma |\sigma - \pi/2|^\beta$,

где γ – некоторая постоянная. Тогда из (5) следует

$$\frac{d\theta}{d\sigma} \approx -\lambda \left(\frac{\mu - 1}{\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \sigma \right)^{1-\beta} + \gamma \left(\frac{\pi}{2} - \sigma \right)^{1+\beta} \right),$$

$$\sigma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0.$$

После интегрирования и замены разности $\pi/2 - \sigma$ на эквивалентную бесконечно малую величину $\cos \sigma$ имеем

$$\theta \sim \theta_A + \lambda \left(\frac{\mu - 1}{(2 - \beta)\gamma} \cos^{2-\beta} \sigma + \frac{\gamma}{2 + \beta} \cos^{2+\beta} \sigma \right). \quad (7)$$

Согласно методу Леви–Чивиты, функцию $\omega = \theta + i\tau$ представим в виде суммы

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2. \quad (8)$$

В соответствии с условиями (6) функция $\omega(\zeta)$ является нечетной.

Функция $\omega_0(\zeta)$ должна иметь нужные скачки угла θ (в точках излома границ). В качестве такой функции используем функцию Жуковского для отрывного обтекания прямолинейной пластины AC , отклоненной на угол θ_A от оси X ,

$$\omega_0 = \beta i \ln \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}. \quad (9)$$

Функция $\omega_1(\zeta)$ представляет собой степенной ряд и служит для удовлетворения граничному условию (5):

$$\omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \zeta^{2m+1}. \quad (10)$$

Функция $\omega_2(\zeta)$, которая отсутствует в обычном методе Леви–Чивиты, введена для того, чтобы учесть главную часть особенности производной $d\theta/d\sigma$ вблизи точки $\sigma = \pi/2$. В соответствии с (7)

$$\omega_2 = B_1 \lambda \zeta \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2} \right)^{2-\beta}. \quad (11)$$

При $\zeta = e^{i\sigma}$

$$\begin{aligned} \theta(\sigma) &= \theta_A + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \cos(2m+1)\sigma + \\ &+ B_1 \cos(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau(\sigma) &= \beta \ln \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma + \\ &+ B_1 \sin(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\sigma} &= -\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)c_{2m+1} \sin(2m+1)\sigma - \\ &-(3-\beta)B_1 \sin(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma - \\ &-(2-\beta)B_1 \cos(3-\beta)\sigma \cos^{1-\beta} \sigma \sin \sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\sigma} &= \beta \left(-\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma} - \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)c_{2m+1} \cos(2m+1)\sigma + \\ &+ B_1 (3-\beta) \cos(3-\beta)\sigma \cos^{2-\beta} \sigma - \\ &- B_1 \sin(3-\beta)\sigma \cos^{1-\beta} \sigma \sin \sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициент B_1 определяется из условия (5) при $\sigma \rightarrow \pi/2$

$$B_1 = -\frac{4\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{(2 - \beta)\gamma \sin(\pi\beta/2) \left(\frac{1}{p} - p\right)^2}, \quad (16)$$

$$\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \pi/2} \left(\frac{V}{V_0} \cos^{-\beta} \sigma \right) = 2^{-\beta} \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m c_{2m+1} \right].$$

Условие (5) в точке отрыва C ($\sigma \rightarrow 0$) с учетом (13) и (14) приводит к равенству

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 c_{2m+1} + (((2-\beta) + 3-\beta)^2) B_1 - \frac{\lambda\mu}{\pi} \frac{4p^2}{(1+p^2)^2} = 0. \quad (17)$$

Из определения функции Жуковского найдем дифференциал

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{Q}{\pi V_0} e^{i\omega(\zeta)} \frac{2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)}{\left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)^2 + \left(\frac{1}{p} - p \right)^2} d\zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (2) участок оболочки CB представляет собой дугу окружности радиуса $R_0 = \frac{2T}{\rho V_0^2 \mu} = \frac{2}{\lambda\mu} \frac{Q}{V_0}$. Обозначим через α центральный угол дуги CB , через θ_A, θ_B и θ_C – углы наклона касательной в точках A, B и C оболочки. Тогда длина L всей оболочки ACB будет равна

$$L = \frac{Q}{V_0} \left(\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda\mu} \right), \quad dZ = \frac{Q}{V_0} dz. \quad (19)$$

Координаты точки B равны

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{Q}{V_0} x_B = \\ &= \frac{Q}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Re} dz + \frac{2\alpha}{\lambda\mu} (\sin(\theta_C + \alpha) - \sin \theta_C) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{Q}{V_0} y_B = \\ &= \frac{Q}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Im} dz - \frac{2\alpha}{\lambda\mu} (\cos(\theta_C + \alpha) - \cos \theta_C) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Расстояние l между точками закрепления A и B

$$l = \frac{Q}{V_0} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}. \quad (22)$$

Из (19)–(22) найдем безразмерные отношения, определяющие конфигурацию оболочки и потока:

$$\frac{Q}{V_0 l} = Q^* = \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad (23)$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda\mu}}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad (24)$$

$$\frac{Y_B}{X_B} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{\int_{AC} \operatorname{Im} dz - \frac{2\alpha}{\lambda\mu} (\cos(\theta_C + \alpha) - \cos \theta_C)}{\int_{AC} \operatorname{Re} dz + \frac{2\alpha}{\lambda\mu} (\sin(\theta_C + \alpha) - \sin \theta_C)}. \quad (25)$$

Кроме того, необходимо определить положение точки отрыва струи от гладкого контура. Если рассматривается течение с выполнением условия конечности кривизны свободной поверхности, то (см. рис. 1 б)

$$\frac{d\tau}{d\sigma}(0) = -\beta + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) c_{2m+1} + B_1(3-\beta) = 0. \quad (26)$$

Численный алгоритм и оценка погрешности

Задача решалась в безразмерном виде: параметры l и V_0 полагались равными единице. Заданными являлись параметры $\mu, Q^*, y_B/x_B$ и L/l . Для возвращения к размерным величинам линейные величины умножались на реальный размер l , а скорости – на V_0 .

Численно задача решалась методом коллокаций с сохранением первых n членов в сумме (10). Уравнение (5) удовлетворялось в отдельных точках дуги AC ($\sigma_m = m\pi/(2n), m = 1, n-1$). Для выполнения условия (2) в точках $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_n = \pi/2$ использовались равенства (16) и (17). В точке отрыва либо удовлетворялось условие (26), чему соответствует длина смоченной части оболочки $L_C = L_0$, либо величина L_C задавалась.

Получаемая при этом система $n + 5$ нелинейных уравнений (совместно с равенствами (23)–(25)) относительно параметров $\lambda, \theta_A, \alpha, p, B_1, c_{2m}$ ($m = 1, n$) решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Координаты точек границы и внутренних точек потока определялись численным интегрированием (18).

При решении исследовано поведение безразмерных параметров:

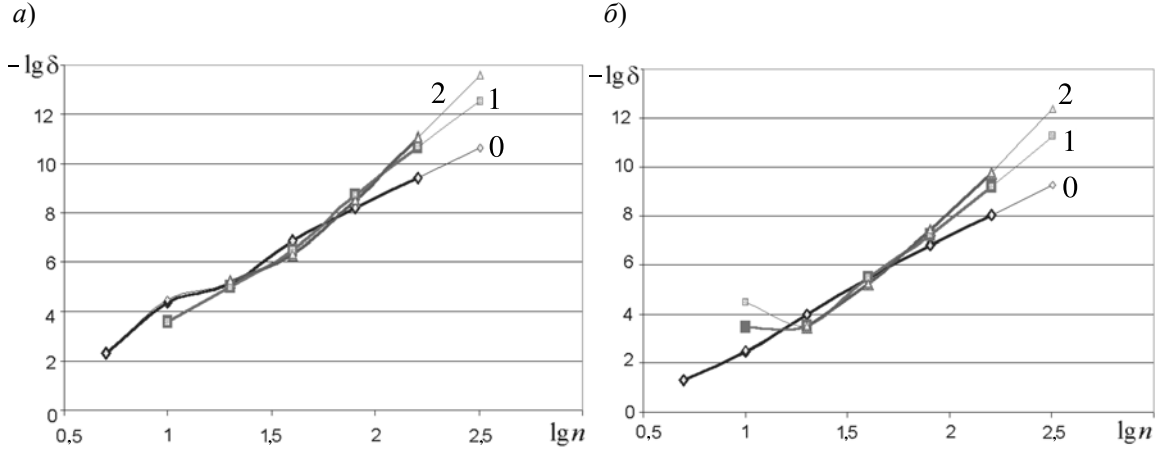


Рис. 3. Оценка погрешности параметров:
 а – C_x ; б – θ_c для $Q^* = 0,25, \mu = 1$

натяжения $T^* = \frac{4T}{\rho V_0^2 l \mu} = \frac{2R_0}{l}$;
 высоты оболочечной конструкции $H^* = \frac{H}{l} = \begin{cases} -\min_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} Y(\sigma)/l, & \theta_c \leq 0; \\ R_0(1 - \cos \theta_B)/(V_0 l), & \theta_c \leq 0; \end{cases}$
 коэффициентов давления $C_x = \frac{2}{\rho V_0^2 l} \operatorname{Re} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = Q^* \left(\frac{V_\infty}{V_0} + \frac{V_0}{V_\infty} - 2 \right)$,
 $C_y = \frac{2}{\rho V_0^2 l} \operatorname{Im} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = \frac{\mu R_0}{l} (\sin \theta_A - \sin \theta_B) + \mu$.

Для оценки погрешности использовалась

численная фильтрация результатов расчетов [3, 4], полученных при различных числах точек коллокаций n . Результаты фильтрации изображены на рис. 3 и 4, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа точек коллокаций n , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра $\delta = |\Delta u/u|$. Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2, ... – результаты первой, второй и т. д. фильтрации. Толстыми линиями изображены результаты попарного вычитания, тонкими – сравнения с эталоном [3]. Эти результаты показывают, что для приведенных вариантов рассматриваемые величины определяются с относительной погрешностью около 10^{-12} .

Вычисленные значения для $Q^* = 0,25, \mu = 1$:

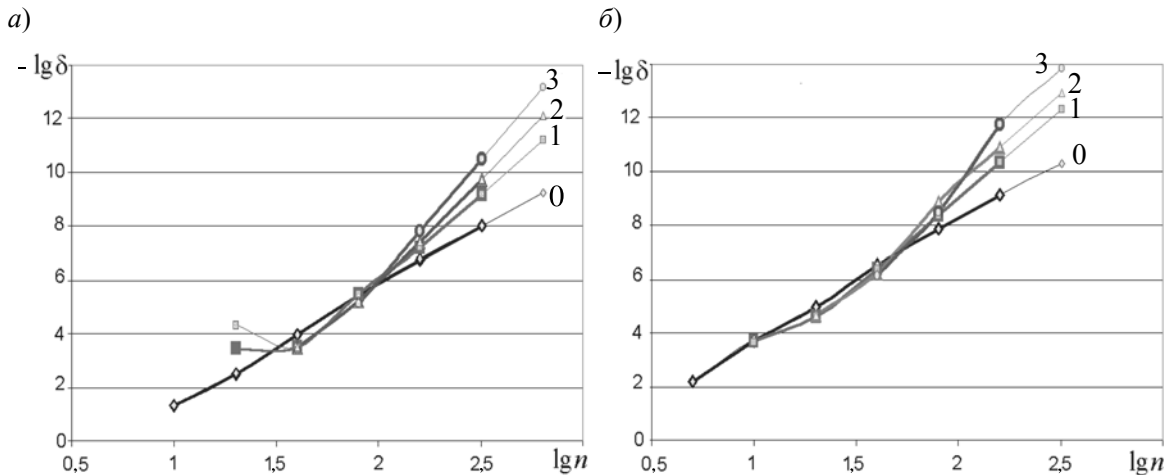


Рис. 4. Оценка погрешности параметров:
 а – T^* ; б – H^* для $Q^* = 0,25, \mu = 1$

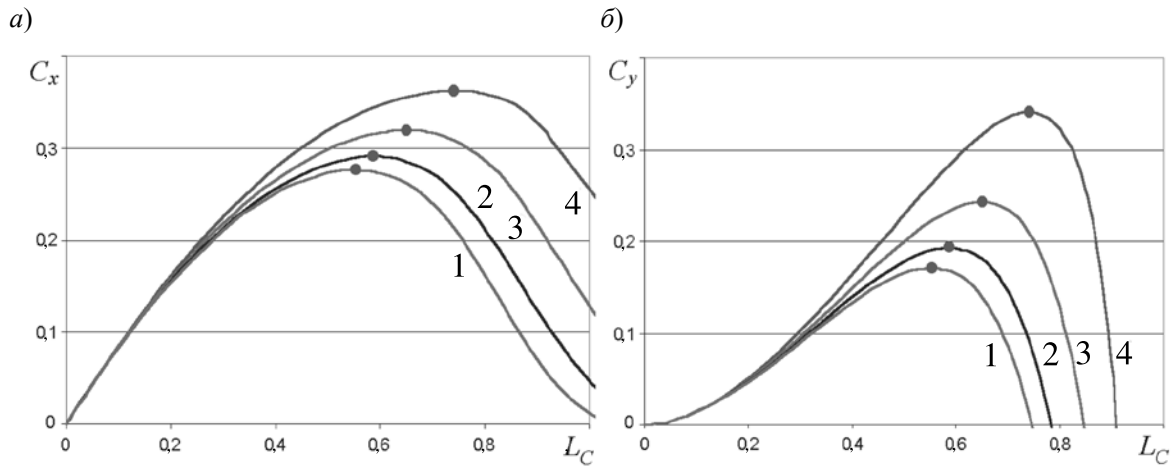


Рис. 5. Зависимости параметров от L_C :
 $a - C_x$; $b - C_y$

$C_x = 0,362480482093$; $\theta_c = -0,269255816692$;
 $T^* = 0,762491093132$; $H^* = 0,506892686481$.

Численные результаты

На рис. 5, 6 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для $y_c = 0$; $L/l = \pi/2$; $\mu = 1$ от длины смоченной поверхности $L_0(Q^*)$ при $Q^* = 2; 1; 0,5; 0,25$ (кривые 1–4). Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия (26) ($L_c = L_0$), отмечено на графиках жирной точкой. Видно, что при $L_c = L_0$ зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма приближенно, поскольку точность передачи графической информации обычно ограничивается двумя знаками (0,01) от диапазона ис-

следования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$, то при определении y_0 с точностью 0,01, значение x_0 определяется примерно до 0,1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна более высокая точность и другая форма графического представления.

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} . Согласно этому, выберем шаг по параметру θ_c равным 10^{-6} и рассмотрим разности $\Delta u = u - u_0$ в зависимости от $\Delta \theta_c = \theta_c - \theta_{c0}$, где u_0 , θ_{c0} – значения параметра u и θ_c при выполнении (26).

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 7, 8. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс

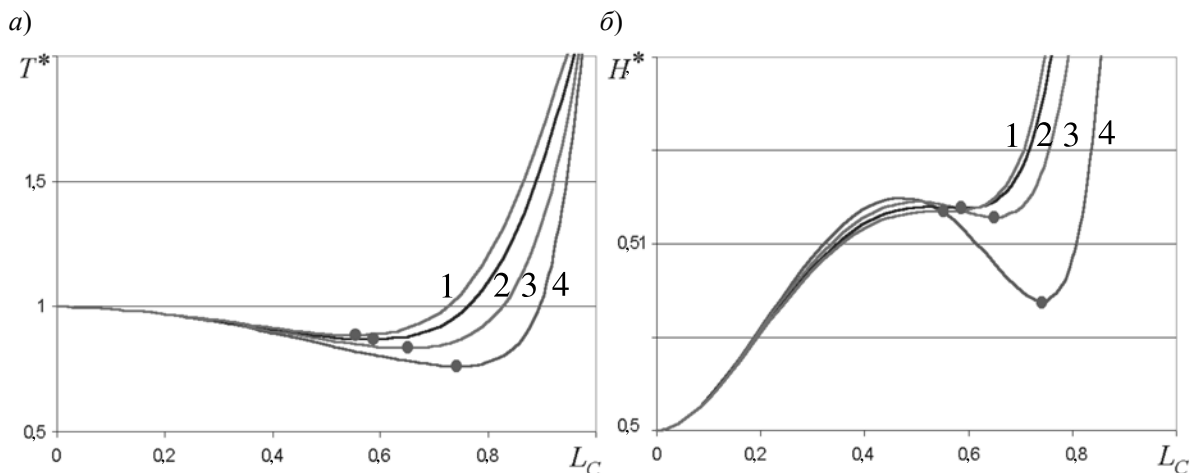


Рис. 6. Зависимости параметров от L_C :
 $a - T^*$; $b - H^*$

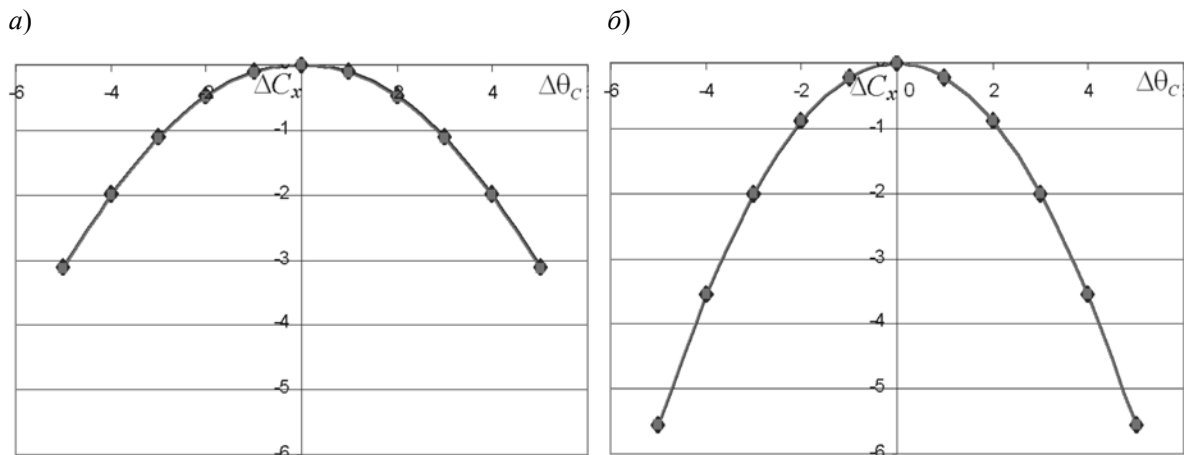


Рис. 7. Зависимости приращения параметра C_x :
 а – для $Q^* = 0,25, \mu = 1$; б – для $Q^* = 0,5, \mu = 2$

равна 10^{-6} , по оси ординат – 10^{-12} . На точечные графики зависимостей нанесен график функции $f(x) \approx kx^2$ с подобранными коэффициентами k . Как показывают графики, положение экстремума с высокой точностью совпадает с θ_{c0} .

Таким образом, в данной статье с помощью видоизмененного метода Леви–Чивиты проведено численное решение задачи об отрывном обтекании оболочки вблизи экрана.

Исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Применение технологии фильтрации численных результатов позволило установить этот факт с высокой точностью.

Кроме того, исследование показало, что при выполнении условия гладкого отрыва свободной поверхности, рассчитанные зависимости, характеризующие распределение скорости и давления на смоченной части оболочки, являются монотонными, т. е. выполняется первое условие Бриллюэна. Это условие нарушается при сдвиге точки отрыва ниже по потоку. При сдвиге точки отрыва выше по потоку нарушается второе условие Бриллюэна, т. к. свободная поверхность пересекает границу, соответствующую оболочке. Тем самым, как и при кавитационном обтекании гладких жестких контуров, при обтекании мягкой оболочки существует только одно решение, удовлетворяющее обоим условиям Бриллюэна одновременно, – это решение с гладким отрывом свободной поверхности.

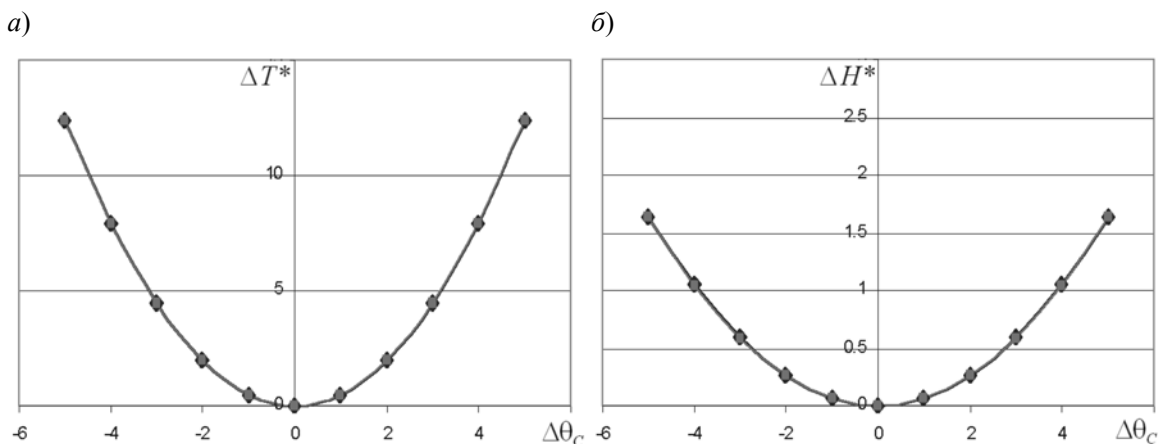


Рис. 8. Зависимости приращения параметров:
 а – T^* ; б – H^* для $Q^* = 0,25, \mu = 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галина, И.Л.** Истечение струи из канала с гибким ограждением [Текст] / И.Л. Галина // Прикл. матем. и мех. –1979. –Т. 43. –№ 1. –С. 91–98.

2. **Terentiev, A.G.** Stationary Two-dimensional Inviscid Flow with Flexible Boundaries Including the Effect of Surface Tension [Text] / A.G. Terentiev, V.P. Zhitnikov // J. Eng. Math. –2006. –Vol. 55. –№ 1–4. –Spec. Iss. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. –P. 111–126.

3. **Житников, В.П.** Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов

[Текст] / В.П. Житников, Н.М. Шерыхалина, С.С. Поречный // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. –2009. –№ 3 (80). –С. 105–110.

4. **Житников, В.П.** Многокомпонентный анализ численных результатов [Текст] / В.П. Житников, Н.М. Шерыхалина. –Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. –389 с.

5. **Гуревич, М.И.** Теория струй идеальной жидкости [Текст] / М.И. Гуревич. –М.: Наука, 1979. –536 с.

REFERENCES

1. Galina I.L. Istechenie strui iz kanala s gibkim ogra-zhdeniem / Prikl. matem. i mekh. –1979. –T.43. –№ 1. –S. 91–98. (rus)

2. Terentiev A.G., Zhitnikov V.P. Stationary Two-dimensional Inviscid Flow with Flexible Boundaries Including the Effect of Surface Tension / J. Eng. Math. –2006. –Vol. 55. –№ 1–4. –Special Iss. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. –S. 111–126. (rus)

3. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechnyi S.S.

Ob odnom podkhode k prakticheskoi otsenke pogreshnostei chislennykh rezul'tatov / Nauchno-tekhicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie. –2009. –№ 3 (80). –S. 105–110. (rus)

4. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M. Mnogokomponentnyi analiz chislennykh rezul'tatov. – Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. –389 s.

5. Gurevich M.I. Teoriia strui ideal'noi zhidkosti. –Moscow: Nauka, 1979. –536 s. (rus)